



PSL 



université
PARIS-SACLAY

Centre interuniversitaire de préparation à l'agrégation de Montrouge

ONDES II

2022-2023



This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License, which permits distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited. This license does not permit commercial exploitation or the creation of derivative works without specific permission.

Table des matières

1 Ondes à la surface de l'eau	3
1.1 Brefs rappels théoriques	3
1.2 [1P] Mesure de la relation de dispersion	3
1.3 [AP] Mise en évidence de phénomènes ondulatoires analogues à ceux de l'optique	4
2 [1P] Mesure de l'effet Doppler en acoustique	4
3 Ondes électromagnétiques dans un câble coaxial	5
3.1 [1P] Caractéristiques d'un câble coaxial	5
3.2 [1P] Propagation d'un pulse dans la ligne, premières observations	6
3.3 [1P] Propagation d'un pulse dans la ligne, mesures quantitatives	8
3.4 [2P] Résonances "Fabry-Pérot" dans un câble coaxial	9
4 [2P] Ondes centimétriques en propagation guidée	10
4.1 Description et montage du dispositif expérimental	10
4.2 Polarisation de l'onde émise	12
4.3 Relation de dispersion	12
4.4 Notion d'impédance	13
4.5 Coefficient de réflexion	13
4.6 Taux d'onde stationnaire (<i>TOS</i>)	14
5 Annexe - Mesure des caractéristiques d'un câble coaxial au LCR-mètre	15
5.1 Analogie mécanique	15
5.2 Calcul	16

Bibliographie :

- R. Journeaux *Électricité, électronique, optique* (De Boeck, 1997)
- R. P. Feynman *Cours de physique* volume 2 (chapitre 24)
- J. D. Jackson *Électrodynamique Classique* (Dunod, 2000)
- P. Lorrain, D. R. Corson *Champs et ondes électromagnétiques* (Armand Colin, 1979)
- P. Combes *Ondes métriques et centimétriques* (Dunod, 1993)
- F. Gardiol *Hyperfréquences* (Presses polytechniques romandes, 1990)
- E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit *Hydrodynamique physique* (InterEditions, 1991)

L'intérêt théorique de ce TP ne doit pas être négligé : c'est l'occasion de s'approprier par l'expérience les notions de dispersion, d'impédance, d'ondes progressives et stationnaires.

1 Ondes à la surface de l'eau

1.1 Brefs rappels théoriques

Lorsque la surface libre d'un liquide est perturbée, deux mécanismes physiques exercent un rappel vers l'horizontalité : la gravité dont l'effet est caractérisé par la masse volumique du fluide ρ et g l'accélération de la pesanteur ; et la capillarité caractérisée par la tension de surface γ qui fait office de rappel élastique. Pour des ondes de faible amplitude les équations et conditions aux limites peuvent être linéarisées et le calcul mène à la relation de dispersion suivante¹ :

$$\omega^2 = \tanh(kh) \left[gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right] \quad (1)$$

Deux cas limites apparaissent alors en fréquence :

- aux hautes fréquences / petites longueurs d'onde / grands nombres d'onde le mécanisme de rappel dominant est la tension superficielle, on parle d'ondes capillaires ;
- aux basses fréquences / grandes longueurs d'onde / petits nombres d'onde le mécanisme de rappel dominant est la gravité, on parle d'ondes de gravité.

L'échelle de longueur qui détermine le passage d'un régime à l'autre est la longueur capillaire $\sqrt{\gamma/\rho g}$. Elle est de l'ordre de 2,3 mm pour l'eau. Pour réviser la théorie associée aux ondes de surface, vous pouvez utiliser avantageusement l'ouvrage *Hydrodynamique physique*, E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit ou, en ligne, par exemple le cours de M. Rabaud.

1.2 [1P] Mesure de la relation de dispersion

Ce système permet de générer des ondes dispersives, dont la vitesse de phase dépend de la fréquence, et d'en mesurer la fréquence et la longueur d'onde. Il doit permettre de retrouver expérimentalement la relation de dispersion des ondes à la surface de l'eau. La notice de la cuve à onde est N614.

Contrairement à g et ρ , la tension de surface γ peut varier du fait de la présence de graisses, de surfactants, ou de n'importe quel polluant dans la cuve. Avant toute chose vous devrez *nettoyer soigneusement la cuve à onde* à l'éthanol pour la dégraisser, la laisser correctement sécher, et utiliser de l'eau distillée la plus récente possible dont la tension de surface doit être celle de l'eau pure : $\gamma = 72 \text{ mN/m}$ (à 20 degrés Celsius).

Vous pouvez dès lors préparer votre expérience :

- Mesurer le grossissement de la projection sur le panneau blanc sur la face avant de la cuve. Estimer l'incertitude de cette mesure. L'inclinaison du miroir à exactement 45 degrés permet d'avoir le même grossissement sur les deux directions.
- Remplir la cuve d'eau distillée sur une hauteur h de l'ordre du centimètre. Que vaut alors $\tanh(kh)$ ² ?
- Brancher, dans un premier temps, un unique point source à l'embout de la soufflerie via le tube en caoutchouc adapté. L'embout s'accroche au rail sur le côté de la cuve et doit effleurer la surface de l'eau (voir notice).
- Relier la fiche pour câble coax du générateur d'onde (ENSP4233) à un appareil permettant de mesurer la fréquence du signal, typiquement un oscilloscope. Celui-ci affichera la fréquence du jet d'air.

Vous générez alors un flux d'air alternatif qui engendre des ondes *propagatives* à la surface de l'eau. Leur fréquence est mesurée à l'oscilloscope, et la longueur d'onde se mesure sur l'écran blanc face à la cuve en immobilisant

1. Cette formule suppose que le fluide supérieur soit de densité négligeable par rapport à celle du fluide inférieur, comme dans le cas de l'air au dessus de l'eau.

2. On doit vérifier qu'il peut être approximé à 1.

l'image grâce au stroboscope. **La méthode de mesure de la longueur d'onde doit être judicieusement choisie**, le pied à coulisse peut être un outil utile ici, et le grossissement entre la taille réelle et la taille sur l'écran ne doit pas être oublié ! Estimer les incertitudes et en déduire k et ω . Répéter pour plusieurs fréquences.

Technique de mesure alternative pour la mesure de la longueur d'onde : prendre une photo et réaliser une analyse du profil d'intensité de l'image avec ImageJ pour déterminer la longueur d'onde. Pour réaliser une analyse du profil d'intensité : prendre une photo et l'enregistrer sur le pc, lancer 'ImageJ', charger la photo (File => Open). Puis utiliser l'onglet « Rectangle » pour définir la zone à analyser pour le profil de l'image. Puis sélectionner dans l'onglet Analyze => Plot Profil. Une fenêtre s'ouvre avec le profil d'intensité, en fonction de la distance en pixel. Il faut donc calibrer les données : le grossissement entre taille réelle et taille sur la photo (conversion mm/pixel) doit être calibré, avec par exemple, la technique usuelle d'un objet de taille connue, posé sur la cuve. On peut extraire les données, dans la fenêtre du profil : Data=> save Data. On peut également directement mesurer les longueurs sur l'image, en pixels avec colorJ. Utiliser l'onglet « Straight line ». Puis Onglet : Analyze => Measure. Cet outil de mesure peut s'appliquer sur l'image, comme sur le profil d'intensité. Répéter plusieurs fois les mesures pour estimer les incertitudes de pointée.

Tracer les points expérimentaux ω en fonction de k puis, par un ajustement, vérifier la relation de dispersion théorique et déterminer la tension de surface γ de l'eau. On pourra plutôt ajuster ω^2/k en fonction de k^2 , pour obtenir une droite de pente γ/ρ et d'ordonnée g à l'origine.

Pour finir cette manip vous pouvez régler le stroboscope afin d'avoir une image parfaitement fixe, puis ajouter quelques gouttes de surfactants (typiquement du savon ou du liquide vaisselle). Vous observez le motif bouger, signe que la relation de dispersion a changé. Vous avez mis en évidence l'influence de la tension de surface sur la relation de dispersion. *Attention : Cette dernière manip est irréversible et vous devrez alors vider et nettoyer à nouveau la cuve pour appliquer le protocole précédent de nouveau.*

1.3 [AP] Mise en évidence de phénomènes ondulatoires analogues à ceux de l'optique

Vous pouvez utiliser la cuve à ondes pour observer :

- Des ondes stationnaires en disposant deux points sources à la surface de l'eau. Étudier l'influence de la distance entre les deux sources. Vous pouvez aussi placer simplement la source unique face à une paroi de réflexion et jouer sur la distance.
- Des interférences en utilisant les réseaux de fentes de différents pas et différentes largeurs.
- De la diffraction en faisant passer les ondes par la fente unique de grande taille.
- Enfin, réfléchir au fait que l'analogie de la lentille optique dans le cas de la cuve à onde est simplement un objet plat d'épaisseur proche de la hauteur d'eau, posé sur le fond. En effet, la vitesse de phase dépendant de h elle est modifiée par un tel obstacle de la même manière qu'elle change lors du passage du rayon lumineux dans une lentille en verre ($n = c/v_\varphi$). Regarder l'influence, sur votre système d'ondes, du prisme et des lentilles convergente ou divergente.

Remarque : pour que ce dernier point fonctionne il faut que les objets ajoutés soient couverts d'eau, mais pas trop. Quantitativement, il faut que le niveau d'eau avec objet soit **inférieur au millimètre**. De plus, les ondes ne doivent pas pouvoir éviter l'objet : il faut les y contraindre en plaçant la barrière en métal percée à la dimension des objets.

2 [1P] Mesure de l'effet Doppler en acoustique

On cherche à mettre en évidence l'effet Doppler. Pour cela, on utilise deux transducteurs piezoélectriques montés sur un banc à défilement : l'un est posé sur pied fixe et excité par un GBF (c'est l'émetteur) et l'autre est monté sur le support mobile du banc et se déplace à vitesse constante et fixée, vers l'avant ou l'arrière. C'est le récepteur.

Dans un premier temps, les deux transducteurs étant face à face, immobiles et proches l'un de l'autre, régler la hauteur de chacun des deux et adapter la fréquence d'excitation de manière à recevoir le signal le plus fort possible. Celle-ci doit se trouver autour de $f_{em} = 40$ kHz mais peut varier de quelques centaines de Hertz. Lorsqu'on met

en route le défilement du banc à vitesse v_{rec} la fréquence f_{rec} perçue par le récepteur varie selon (le récepteur s'éloignant de l'émetteur) :

$$f_{rec} = \left(1 - \frac{v_{rec}}{c}\right) f_{em} \quad (2)$$

La faible vitesse de défilement (à mesurer avec précision !) engendre une différence de fréquences $\Delta f = f_{em} - f_{rec}$ de l'ordre du hertz de sorte qu'une mesure directe de la fréquence ne sera pas assez précise pour distinguer f_{em} de f_{rec} . On propose alors de réaliser une **détection synchrone**. Le signal reçu de fréquence f_{rec} et multiplié au signal émis de fréquence f_{em} à l'aide d'un multiplieur. On obtient alors un signal modulé dont une décomposition en série de Fourier permet de se convaincre qu'il contient deux fréquences : $f_{rec} + f_{em} \approx 2f_{em} \approx 80$ kHz et $\Delta f \approx 1$ Hz qui ont des ordres de grandeur très différents. Un filtrage passe-bas effectué par un circuit RC en sortie du multiplieur permet de ne récupérer que le signal basse fréquence Δf dont on peut mesurer la fréquence. On effectuera la mesure de fréquence à l'oscilloscope.

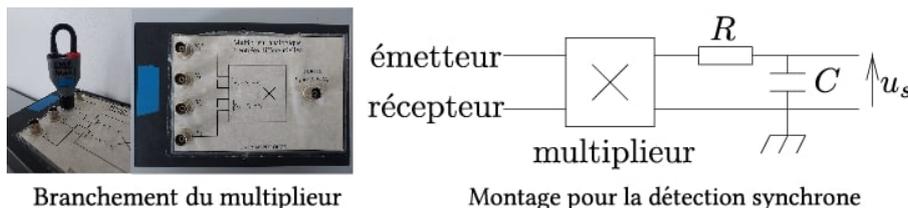


FIGURE 1 –

Attention au branchement du multiplieur. D'une part, il ne faut pas oublier de l'alimenter sous $+15/0/-15$ V sur le côté du boîtier. D'autre part il possède quatre entrées V_1^+ , V_1^- , V_2^+ , V_2^- de sorte que le signal de sortie est $(V_1^+ - V_1^-) \times (V_2^+ - V_2^-)$. Pour une utilisation usuelle, on annulera V_1^- et V_2^- en y branchant un T muni d'un cavalier (voir par exemple la photo de gauche).

Vous pouvez enfin confronter votre mesure de fréquence et sa précision à la valeur prévue par la formule théorique précédente à condition d'avoir rigoureusement mesuré la vitesse de défilement du banc. Vous pouvez aussi doubler la mesure en changeant le sens de défilement, et le signe dans la formule de l'effet Doppler.

3 Ondes électromagnétiques dans un câble coaxial

Références :

- Ondes, HPrepa deuxième année - **Utile notamment pour se remettre au clair sur la théorie!**
- Berkeley Vol. III, Ondes - *Contient notamment une introduction générale des notions d'impédance*
- Quaranta, Tome IV, entrée lignes électriques.
- R. Journeaux, *Électricité, électronique, optique*,
- R. P. Feynman, *Cours de physique*, volume 2 (chapitre 24).

L'objet de cette partie est d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques dans un câble coaxial. La vitesse de propagation de ces ondes et la résolution temporelle limitée des oscilloscopes justifient de prendre un câble le plus long possible, entre 20 et 100 mètres. Cela permet aussi, malgré des capacités et inductances linéiques faibles, d'atteindre des capacités et inductances totales raisonnablement mesurables.

3.1 [1P] Caractéristiques d'un câble coaxial

La mesure des caractéristiques d'un tel câble peut se faire grâce à un appareil spécifique, le LCR-mètre, dont les réglages spécifiés ci-après sont justifiés qualitativement et quantitativement en annexe.

Remarque : Pour lier le câble coaxial de 100 m au LCR-mètre vous devrez utiliser un câble BNC/Banane. Ce faisant vous ajoutez une longueur de câble de l'ordre du mètre, en plus de connexions mal maîtrisées. Ce sont autant de sources d'incertitude. Il est également possible de brancher un connecteur coaxial/double bananes sur le câble étudié, afin de n'utiliser que des câbles bananes.

Capacité linéique La mesure de la capacité s'effectue au LCR-mètre :

- En circuit ouvert (une extrémité du câble libre, l'autre reliée au LCR-mètre).
- À la fréquence la plus basse permise et/ou à la fréquence de travail.

On mesure ainsi la capacité totale du câble (+ le raccord au LCR-mètre, + les connexions, etc.). La capacité linéique s'obtient en divisant cette quantité par la longueur.

Inductance linéique La mesure d'inductance s'effectue au LCR-mètre :

- En court-circuit (relier l'âme à la gaine par un cavalier au niveau de l'extrémité du câble non branchée au LCR-mètre).
- À la fréquence la plus basse permise et/ou à la fréquence de travail.

On mesure ainsi l'inductance totale du câble (+ le raccord au LCR-mètre, + les connexions, etc.). L'inductance linéique s'obtient en divisant cette quantité par la longueur.

Impédance d'un câble coaxial On appelle impédance caractéristique du câble le rapport entre la tension et le courant d'une onde électrique linéaire progressive³. Elle est donnée par :

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (3)$$

Déduire sa valeur des grandeurs mesurées précédemment et la comparer à la valeur attendue $Z_C = 50 \Omega$, adaptée aux impédances de sorties des générateurs (noter que certains câbles utilisés pour la vidéo ont une impédance caractéristique de 75Ω).

Attention! Cette mesure simple peut donner des valeurs significativement différentes de celles annoncées par le constructeur sans que l'on soit tout à fait capable d'en quantifier l'erreur. Les méthodes de mesure de l'impédance du câble présentées ci-après sont plus précises et permettent de trouver des valeurs plus fiables.

3.2 [1P] Propagation d'un pulse dans la ligne, premières observations

L'objectif de cette partie et de la suivante est d'étudier la propagation d'un signal dans le câble coaxial. Dans un premier temps on observe qualitativement la propagation, dans le câble, d'un pulse. Les mesures quantitatives sont proposées dans un second temps.

Générateur d'impulsion Afin de distinguer facilement le signal envoyé dans la ligne et le signal réfléchi nous utilisons un câble long, choisi et étudié dans la partie précédente, dans lequel nous envoyons des signaux brefs. Pour se faire nous utilisons un générateur d'impulsions, par exemple ENSP4389 (N629).

Réglage du générateur Avant toute chose, régler l'impédance de sortie du générateur en "High Z" : visiter le menu "Utility" puis "Output Setup" et commuter "Load" qui sera *a priori* réglé à 50Ω vers "High Z"⁴. Vous pouvez ensuite visiter le menu impulsion et régler la forme du signal. Les entités réglables sont schématisées sur la figure suivante.

3. L'impédance caractéristique d'un milieu est, avec la célérité c , un élément majeur de la théorie des ondes progressives linéaires puisqu'elle quantifie précisément le rapport entre les grandeurs couplées (ici la tension et l'intensité, mais parfois les champs électrique et magnétique, ou la vitesse et la pression). À l'interface entre deux milieux d'impédance différente ce rapport entre u et i doit prendre une autre valeur et par continuité cela impose l'existence d'une onde réfléchie. Cette notion d'impédance se retrouve aussi dans les dipôles électriques où elle joue le même rôle en imposant le rapport u/i en un point. Voir le Berkeley pour plus de détails.

4. Ce réglage invite à s'interroger sur l'affichage des GBFs. Sachant que les GBFs ont généralement une impédance de sortie de 50Ω , la tension réellement imposée au circuit est réduite de moitié par rapport à la consigne interne si ce circuit a également une impédance de 50Ω . Une partie des GBFs prennent ce facteur en compte, et affichent en pratique une tension moitié de la tension imposée en interne, avant l'impédance de sortie. Cela peut se vérifier en branchant directement ces GBFs sur un outil de mesure de tension de grande impédance. En passant en "High Z", le GBF affiche directement la tension interne qu'il génère, sans prendre en compte une potentielle chute de tension sur sa résistance de sortie.

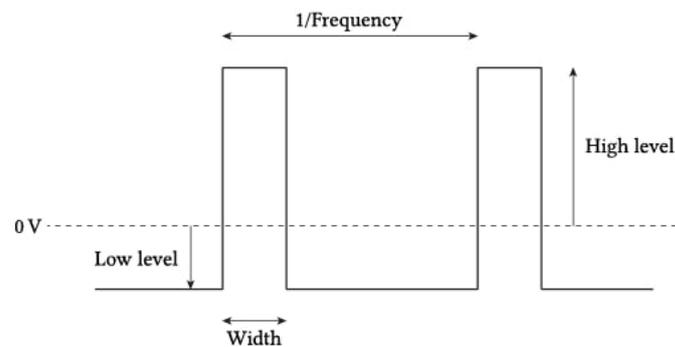


FIGURE 2 –

Pour choisir ces paramètres, rappelez-vous le besoin de travailler avec des impulsions courtes ($< 1 \mu s$). L'amplitude du signal doit être de quelques volts. Un réglage du *Trigger* en mode normal sur la voie du GBF permet d'observer un signal stable à l'écran. La fréquence doit alors être suffisamment petite pour que deux pulses successifs soient nettement distincts.

Visualisation du signal La visualisation du signal à l'oscilloscope doit se faire via un câble le plus court possible relié à la voie 1. Nous aurons bien sûr besoin d'une deuxième sortie de sorte que vous pouvez d'ores et déjà placer un T en sortie du GBF.

À ce stade et avant de passer à la suite vous devez impérativement observer à l'écran de l'oscilloscope une unique impulsion stable, brève et d'amplitude égale à celle affichée par le GBF.

Observation du pulse, réflexion Relier maintenant la fiche libre du T du GBF à la voie 2 de l'oscilloscope par le câble long et observer.

- L'amplitude du signal d'entrée est diminuée de moitié sur la voie 1. Ceci lié au fait que le GBF débite dorénavant son signal dans deux câbles d'impédances d'entrée similaire, créant ainsi un pont diviseur de tension qui divise par deux la tension mesurée en voie 1.
- À bonne distance du pulse envoyé un pic apparaît sur la voie 2. Il correspond à la superposition, en bout de ligne, du signal envoyé dans le câble et du signal réfléchi sur la voie 1 de l'oscilloscope. Son amplitude est supérieure à celle du signal envoyé seul, mais inférieure à son double du fait de l'atténuation.
- Un second pulse sur la voie 1 correspond au retour du signal réfléchi sur la voie 2. Pour s'en convaincre, vous pouvez vérifier que la durée entre les deux pulses est indépendante de la fréquence. Elle correspond à la durée de propagation dans le câble.

Vous pouvez débrancher momentanément le câble long de l'oscilloscope. Hormis la disparition du signal sur la voie 2 les pulses de la voie 1 sont inchangés : que la réflexion en bout de ligne ait lieu dans le vide ou dans la résistance $1M\Omega$ de l'oscilloscope est équivalent.

Influence qualitative de l'impédance de charge sur la réflexion du signal Remplacer, à l'extrémité du câble long, l'oscilloscope par un potentiomètre de résistance variable R . Le coefficient de réflexion en tension vaut alors

$$r = \frac{R - Z_C}{R + Z_C} \quad (4)$$

Observer qualitativement l'influence de cette impédance de charge sur la réflexion :

- Lorsque $R = 0$, $r = -1$. La ligne est en court-circuit et le signal réfléchi est l'opposé du signal envoyé (à l'atténuation près).
- Lorsque $R = Z_C$, $r = 0$. L'adaptation d'impédance est établie, le signal est absorbé par la charge. Le signal réfléchi disparaît.

- Lorsque $R > 0$, $0 < r < 1$. Le signal est réfléchi avec une amplitude croissante avec R .
- Lorsque $R \rightarrow +\infty$ on tend vers le cas de l'étude précédente où la ligne est en circuit ouvert. Le signal est complètement réfléchi, $r = 1$. Son amplitude n'est diminuée que par l'atténuation du câble.

On peut aussi faire ces manipulations en plaçant un T sur le potentiomètre et en observant à l'oscilloscope le signal en bout de ligne. Son évolution suit la même logique.

Évaluer l'impédance caractéristique du câble en cherchant la résistance de charge qui annule le signal réfléchi (la résistance du potentiomètre se mesure en la débranchant, attention en ce faisant de pas modifier celle-ci à ce moment-là).

3.3 [1P] Propagation d'un pulse dans la ligne, mesures quantitatives

Mesure de l'impédance de la ligne Une mesure plus précise de Z_C peut être obtenue par ajustement. En bout de ligne, la tension varie comme $U = \frac{R}{R+Z_C} U_0$ où U_0 est la tension mesurée lorsque l'impédance y est infinie (ligne ouverte, directement reliée à l'oscilloscope). En mesurant U pour différentes valeurs de R , ajuster

$$\frac{U_0}{U} = 1 + \frac{Z_C}{R}, \quad (5)$$

et évaluer Z_C ainsi que son incertitude.

Vitesse de propagation et constante diélectrique Rebrancher le câble long entre le GBF et l'oscilloscope de manière à observer les trois impulsions : envoyée, en bout de ligne et réfléchi. La vitesse du pulse est obtenue en mesurant le temps de propagation du pulse sur une distance connue. On prendra pour référence, à chaque étape, le début du pulse puisqu'à cet endroit la variation du signal est verticale et peut être bien repérée. La même vitesse peut être mesurée trois fois : entre le premier pulse et celui en bout de ligne ; entre le pulse en bout de ligne et le signal réfléchi (la distance parcourue est de 100 m) ou directement entre les deux signaux au niveau du GBF, la distance étant cette fois de 200 m ce qui réduit l'incertitude.

La valeur de vitesse mesurée peut être comparée à la célérité des ondes dans le câble

$$v = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0}}. \quad (6)$$

Attention ! La *vitesse du pulse* que nous avons mesurée est une *vitesse de groupe*. En toute rigueur, le protocole adéquat aurait été de repérer à tout instant le centre du paquet d'onde, ce qui n'est pas réalisable ici. La mesure est tout de même valide dans la mesure où la propagation n'est pas dispersive : toutes les composantes du paquet d'onde se propagent à la même vitesse et il n'est pas déformé. Ainsi, quel que soit le point pris pour référence il se propage bien à la vitesse v_g . On présentera plus bas un protocole de mesure de la vitesse de phase.

On peut également remonter à la constante diélectrique ϵ_r de l'isolant situé entre les deux conducteurs du câble, sachant que $\mu_r = 1$ (il s'agit d'un matériau non magnétique) :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (7)$$

où $c = 299792458$ m/s est la célérité de la lumière dans le vide.

Dispersion dans le câble La propagation dans le câble coaxiale n'est pas dispersive. C'est ce qui en fait notamment un outil commun du transport de l'information, qu'il ne doit pas déformer. Dans le modèle du câble à constantes réparties sans dissipation (et donc avec simplement des inductances et capacités), on montre en effet que la propagation dans le câble est régie par l'équation de d'Alembert, qui n'est pas dispersive. Dans un modèle plus raffiné, où l'on considère les pertes via des résistances linéiques en série et en parallèle, de légers effets dispersifs apparaissent, qui sont eux-mêmes grandement réduits en choisissant des paramètres linéiques qui correspondent aux *conditions de Heaviside*. Ces effets de dispersion sont négligeables sur la plage de fréquence étudiée (qq centaines de kHz).

Aux hautes fréquences on ne peut plus garantir l'absence de dispersion et d'atténuation, ce qui explique la déformation observée du pulse.

Mesure de l'atténuation La mesure de l'atténuation se fait grâce au montage suivant : Un câble de longueur L_0 la plus courte possible est relié d'un côté à un GBF, et de l'autre à une résistance d'environ 50Ω . La tension aux bornes de la résistance est mesurée directement par un oscilloscope, qui ne mesure que cette tension.

L'indication sur l'atténuation donnée par le constructeur étant à une fréquence de 10 MHz, on envoie dans le câble un sinus à cette fréquence.

L'amplitude du sinus mesurée aux bornes de la résistance pour la longueur L_0 va servir de tension de référence U_0 . Lorsque des câbles de plus en plus longs sont intercalés entre le GBF et le câble initial, l'amplitude U du pulse diminue du fait de l'atténuation. Les câbles disponibles dans la collection peuvent être branchés en série afin d'explorer une large gamme de longueurs. On trace alors le coefficient d'atténuation

$$a = 20 \log \left(\frac{U}{U_0} \right), \quad (8)$$

en fonction de la longueur L rajoutée à L_0 . Vérifier l'indication constructeur $a = -4,5 \text{ dB}/100\text{m}$.

3.4 [2P] Résonances "Fabry-Pérot" dans un câble coaxial

Dans cette partie nous fabriquons un résonateur de Fabry Pérot avec des câbles coaxiaux pour étudier des interférences à ondes multiples. On a déjà compris que pour favoriser la réflexion à une extrémité du câble il faut y imposer une résistance de charge très grande devant l'impédance caractéristique du câble. Si au contraire il y a adaptation d'impédance le signal est complètement transmis.

Expérience Utiliser un câble d'une centaine de mètres. On mettra une résistance de $1 \text{ k}\Omega$ entre le GBF et le câble, pour permettre à l'onde émise par le GBF d'entrer dans la cavité, tout en gardant un facteur de réflexion important. On utilisera un générateur de signaux sinusoïdaux pouvant délivrer des fréquences de plusieurs MHz (l'Agilent qui nous servait à générer les impulsions convient encore). L'autre extrémité du câble est à brancher sur une résistance de $1 \text{ M}\Omega$, aux bornes de laquelle on mesure la tension à l'oscilloscope.

Remarque : La résistance de $1 \text{ k}\Omega$ est fournie avec les accessoires des câbles coaxiaux longs. Il faut utiliser un autre câble, court, entre le GBF et la résistance.

En variant la fréquence et en observant la tension aux bornes de la résistance de $1 \text{ M}\Omega$, repérer les fréquences de résonance de la cavité. La première, par exemple, se situe probablement autour de 930 kHz (pour un câble de 100m). Vous pouvez en repérer au moins une dizaine. Noter que la phase est aussi un bon indicateur. On peut aussi travailler en wobulation.

Relier ces fréquences à la condition de résonance $L = n\lambda/2$, qui implique

$$f = \frac{nc}{2L}. \quad (9)$$

En traçant f en fonction de n , remonter à la valeur de c que l'on peut comparer aux estimations précédentes.

On pourrait aussi remonter à la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k = f\lambda$ et vérifier que la propagation dans le câble n'est pas dispersive aux fréquences étudiées.

Adaptation d'impédance Réaliser le montage précédent en se servant directement de l'entrée de l'oscilloscope, de résistance $1 \text{ M}\Omega$, comme extrémité de la cavité. Intercaler un T entre le câble coaxial de 100 m et l'entrée de l'oscilloscope. Poser le bouchon 50Ω sur la branche libre du T. Balayer à nouveau une large plage de fréquences à la recherche des résonances. Que constatez-vous ?

Du fait de l'adaptation d'impédance entre le câble et le bouchon, le signal n'est plus réfléchi en bout de ligne, et le câble ne constitue plus une cavité.

Structure des modes propres Utiliser maintenant deux câbles coaxiaux de 100 m branchés en série. Mesurer à l'oscilloscope les tensions à la jonction et à l'extrémité libre. Balayer la fréquence et exciter en résonance les différents modes propres, dont on décèlera les profils spatiaux en tension.

4 [2P] Ondes centimétriques en propagation guidée

Références :

- R. P. Feynman *Cours de physique* volume 2 (chapitre 24)
- J. D. Jackson *Électrodynamique Classique* (chapitre 8)
- P. Lorrain, D. R. Corson *Champs et ondes électromagnétiques*, Une introduction à la propagation guidée (chapitre 13)
- P. Combes *Ondes métriques et centimétriques*
- F. Gardiol *Hyperfréquences*
- Voir également les notices fournies par PHILIPS pour le banc d'ondes centimétriques

Les hyperfréquences sont les ondes électromagnétiques de fréquence comprise entre 300 MHz et 300 GHz, soit de longueur d'onde entre 1 m et 1 mm d'où leur dénomination de micro-ondes ou ondes centimétriques. Leur première application, toujours d'actualité, est celle du radar. Elles sont depuis très utilisées dans le domaine des télécommunications (l'horloge d'un ordinateur de bureau actuel est elle-même du domaine des hyperfréquences, télévision par satellite, téléphone cellulaire, réseau sans fil, etc.) : ces fréquences très élevées autorisent de grandes bandes passantes et des antennes de forte directivité. Elles servent aussi au chauffage dans les fours à micro-ondes ($f \simeq 2.5$ GHz).

Les hyperfréquences sont donc **dangereuses** a priori, mais pas aux très faibles puissances utilisées ici.

Dans le cas des faibles puissances utilisées ici, l'émission des ondes se fait au moyen d'une «diode Gunn»⁵, ayant l'avantage d'être une source solide (c'est-à-dire : pas de vide, alimentation basse tension, rendement élevé,...)

On distingue deux types de propagation :

- la propagation **libre** (transmission hertzienne, par satellite), à travers un milieu infini ;
- la propagation **guidée** par :
 1. des guides métalliques (rectangulaires ou cylindriques),
 2. des lignes coaxiales,
 3. des guides «planaires», bifilaires ou micro-rubans, sur des plaquettes de circuits intégrés.

À l'heure actuelle, les lignes coaxiales et micro-rubans tendent à remplacer les guides métalliques qui, du fait de leur poids et de leur encombrement, ne sont plus guère utilisés que dans les dispositifs de puissance, comme les émetteurs *radar* par exemple.

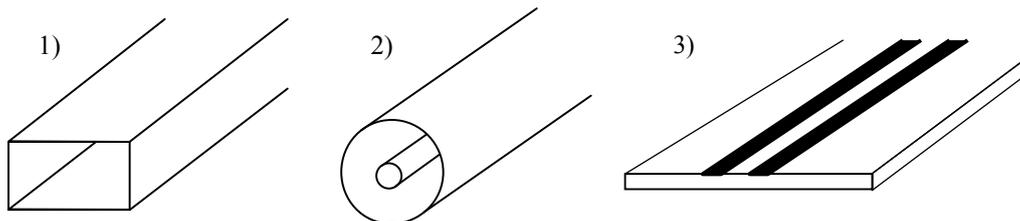


FIGURE 3 –

4.1 Description et montage du dispositif expérimental

Le banc hyperfréquence consiste en un guide d'ondes rectangulaire de grande dimension intérieure $a = 22,86$ mm, qui permet une propagation **monomode** en «bande X», soit entre 8,2 et 12,4 GHz ($\lambda_0 \approx 3$ cm). L'unique mode permis dans le guide est noté TE_{10} et a pour relation de dispersion : $k_g = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/a)^2}$ qui correspond à la longueur d'onde (dans le guide) : $\lambda_g = 2\pi/k_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}}$, où $\lambda_0 = c/f$ est la longueur d'onde dans l'espace

5. Ce composant n'est pas une diode, on l'appelle ainsi parce que c'est un dipôle ; il est placé dans une cavité dont on peut modifier la fréquence de résonance. Contrairement à une diode P-N, il est composé de trois parties de même dopage N : N++ / N- / N++.

libre et $\lambda_c = 2a$ la longueur d'onde de coupure. Dans une section du guide, le champ électrique du mode TE_{10} a l'allure schématisée ci-dessous (le profil est une arche de sinusoïde).

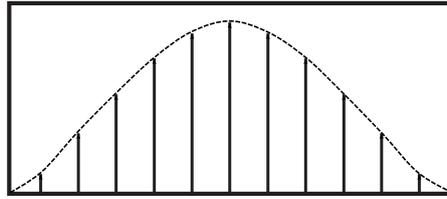


FIGURE 4 –

En TP, vous trouverez le banc hyperfréquence entièrement monté pour vous faire gagner du temps. Le jour du montage, ayez à l'esprit que celui-ci sera en partie démonté et rangé dans sa caisse. Il peut ainsi être profitable de vous entraîner, lors de la préparation aux oraux, à monter vous même le banc. On décrit ci-après la procédure du montage (ne rien brancher pour le moment !) et précise l'utilité de chaque élément (voir schéma plus bas). Les différentes pièces sont associées par quatre vis et écrous correspondant (deux peuvent suffire mais mieux vaut les placer en diagonale l'une de l'autre). Enfin, si l'alignement axial est garanti par le rail en bois vous devez prendre un soin particulier à bien aligner les différents blocs verticalement pour ne pas forcer sur les jonctions voire perturber la propagation de l'onde.

- Lorsque vous montez le banc, vous devez avant tout disposer le rail en bois qui sert à maintenir les pieds alignés et à éviter qu'il ne se désaxent, entraînant la chute du guide métallique et des dommages éventuels.
- A une extrémité du banc en bois, sur deux pieds correctement glissés dans le rail, vous commencez par disposer la chaîne d'émission de l'onde hyperfréquence à savoir (prenez le temps de bien repérer chaque élément) :
 - Une **diode Gunn**, dont le fonctionnement théorique n'est pas du tout à connaître (les grandes lignes sont exposées en annexe) et qui émet une onde d'amplitude non négligeable aux fréquences supérieures à 9,2 GHz. Celle-ci vaut typiquement 20 mV vers 9,2 GHz ;
 - Un **isolateur à ferrite** qui protège, par jeu de polarisation, la diode émettrice des réflexions partielles dans le guide ;
 - Un **modulateur** dont on ne se servira pas ici ;
 - Un **fréquence-mètre** dont le fonctionnement est précisé plus loin ;
 - Un **atténuateur calibré** (son support est plus large que les autres) que vous prendrez soin de régler sur 0 dB.
- Dans l'alignement de ce premier bloc, vous positionnez, soutenu par un pied, un **coupleur directionnel** permettant d'obtenir deux voies d'études indépendantes. L'une, rectiligne horizontale, va nous servir à étudier les ondes propagatives. L'autre, verticale, est la **ligne de mesure** et nous permettra d'étudier les ondes stationnaires.⁶
- Vous terminez le montage en ajoutant une courte rallonge terminée par un **cornet** dont la direction peut être repérée grâce à un rapporteur (cornet 1/4).
- Sur la branche verticale du coupleur directionnel vous pouvez d'ores et déjà fixer un **détecteur d'ondes stationnaires** (ENSP3088) et fermer la ligne par une **plaque métallique**.
- Enfin, non fixé au reste et posé sur un pied à part vous aurez besoin d'un autre cornet associé à un détecteur et réglé à la même hauteur que le premier.

A ce stade, le banc hyperfréquence est monté identiquement au schéma ci-dessous et vous pouvez brancher les différents éléments comme suit.

- L'émetteur est alimenté par l'intermédiaire d'un boîtier d'alimentation lui même relié à une alimentation -12/0 V (**ne pas relier le +12V!**). De ce boîtier sort aussi un câble *vers le modulateur* qui **doit être relié au**

6. A titre indicatif, un coupleur directionnel peut être obtenu en pratiquant deux fentes séparées par une distance $\lambda_g/4$: l'onde réfléchie à la fin du bras principal ne pénètre pas dans le bras auxiliaire. On a ainsi deux points de mesure indépendants.

modulateur même si celui-ci n'est pas utilisé dans ce TP! Une fois alimentée, la diode émet une onde dont la fréquence peut être modifiée en tournant le bloc noir (sur la diode). Vous noterez que la précision de la graduation sur la diode ne permet pas de connaître précisément la fréquence envoyée dans le guide d'où l'utilité du fréquence-mètre (décrit plus loin).

- Le fréquencemètre doit être relié à un oscilloscope (réglé pour observer un signal de quelques dizaines de millivolts d'amplitude).
- Les deux lignes de sortie (la détection d'ondes stationnaires et le cornet sur pied) sont elles aussi reliées à un oscilloscope. La détection d'une onde se fait au moyen d'une **diode** haute fréquence qui transforme le signal alternatif hyperfréquence (indétectable à l'oscilloscope) en un signal continu, approximativement proportionnel à la valeur quadratique moyenne du champ.

Votre banc hyperfréquence est prêt à être utilisé et doit être identique au schéma ci-après.

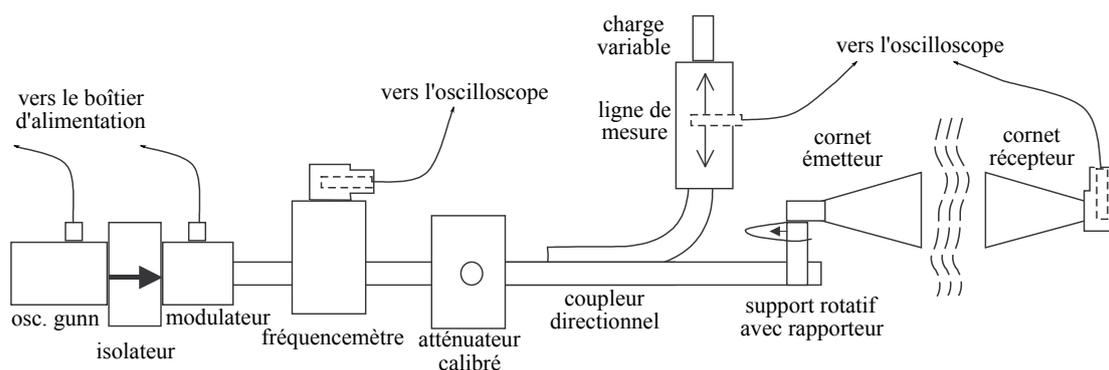


FIGURE 5 –

4.2 Polarisation de l'onde émise

L'onde émise par un cornet est polarisée rectilignement. On fait cette expérience dans le TP Polarisation I (également en série 2).

4.3 Relation de dispersion

Mesure de la fréquence L'établissement de la relation de dispersion dans le guide nécessite d'effectuer une mesure précise de la fréquence de l'onde envoyée dans le guide que la graduation en demi-gigahertz de la diode Gunn ne permet pas, d'où l'utilité du fréquencemètre. Celui-ci consiste en fait en une cavité résonnante de longueur variable et dont la fréquence propre dépend directement de la taille : lorsque vous faites tourner la molette de l'appareil la longueur de la cavité change. La tension aux bornes du détecteur placé à l'intérieur est proportionnelle à l'intensité du champ régnant dans la cavité ; et elle est maximale lorsque la fréquence propre de la cavité coïncide avec la fréquence de l'onde incidente. On peut alors lire ladite fréquence directement sur l'appareil. Estimer l'incertitude sur cette mesure.

Une fois la mesure effectuée, **penser à dérégler le fréquencemètre pour maximiser la puissance transmise au guide d'onde**. Vous pouvez d'ailleurs observer en même temps les signaux du fréquencemètre et du cornet de sortie et constater que, lorsque le fréquencemètre est accordé, une partie de la puissance du signal est absorbée et déduite du signal de sortie.

Mesure de la longueur d'onde dans le guide et relation de dispersion Terminer la ligne de mesure par un court-circuit en fixant une plaque métallique à son extrémité : une onde stationnaire s'établit dans le guide dont les noeuds et les ventres ont, le long de cette ligne, des positions fixes. En promenant le capteur le long du détecteur d'ondes stationnaires, observer les variations du signal. La distance entre 2 minima consécutifs est $\lambda_g/2$ (λ_g : longueur d'onde dans le guide). Connaissant f , on peut déduire λ_0 , longueur d'onde dans le vide. Vérifier la relation de dispersion fournie ci-dessus (on donne $a = 22,86$ mm).

Dans la partie sur l'impédance, on se propose de clore la ligne de mesure avec d'autres systèmes pour mettre en évidence différents phénomènes. Cette partie pourra vous intéresser pour le montage *Ondes : propagation et conditions aux limites* notamment.

[AP] Mesure de la vitesse de groupe Celle-ci est définie par $v_{gr} = d\omega/dk_g = \Delta f/\Delta\sigma$, où $\sigma = 1/\lambda_g$. On peut la déterminer en répétant les mesures précédentes pour deux valeurs différentes de ω . Pour cela, modifier *légèrement* la géométrie de la cavité résonante de l'oscillateur Gunn (les positions extrêmes permettent d'obtenir $\Delta f/f \approx 10$). Déterminer aussi la vitesse de phase moyenne v_ϕ et vérifier qu'on a $v_\phi v_{gr} = c^2$ (cette relation *n'est pas* générale; elle n'est valable que pour des relations de dispersion de la forme $k^2 = \omega^2/c^2 + \text{cste}$).

4.4 Notion d'impédance

Référence : Combes *Ondes métriques et centimétriques*, pages 86-87 notamment

L'impédance (complexe) est définie pour des modes TEM, où les champs électrique E et magnétique H sont perpendiculaires à la direction de propagation, par le rapport $Z = E/H$. Pour un mode TE dans un guide rectangulaire infini, on appelle **impédance itérative**, ou **impédance caractéristique**,⁷ le rapport $Z_0 = E/H_\perp$.

On appelle impédance d'une charge le rapport $Z = E/H_\perp$ dans un plan de référence donné. Pour un guide semi-infini, on a bien sûr $Z = Z_0$, et pour un court-circuit, $Z = 0$.

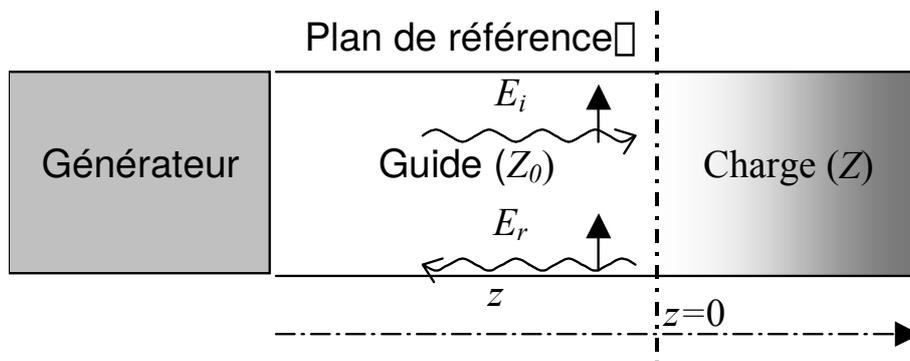


FIGURE 6 –

4.5 Coefficient de réflexion

Lorsque l'onde électromagnétique passe du guide, d'impédance Z_0 à une charge d'impédance Z , elle est en partie réfléchi selon un **coefficient de réflexion** défini comme le rapport des amplitudes complexes des champs électriques réfléchi et incident dans ce plan :

$$r = E_r/E_i \equiv |r| e^{i\phi} \quad (10)$$

$$\phi \quad (11)$$

représente le retard de phase de l'onde réfléchi par rapport à l'onde incidente. Ce coefficient de réflexion est relié aux impédances des milieux selon

$$r = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (12)$$

de sorte que c'est en fait l'impédance réduite Z/Z_0 qui est la seule à avoir une signification expérimentale directe.

7. Dans notre cas, on vérifie que $Z_0 = R_0 \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$, où $R_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ est l'impédance du vide.

4.6 Taux d'onde stationnaire (TOS)

Définition La qualité d'une charge peut être décrite par sa capacité à réfléchir l'onde incidente et, selon la proportion de l'onde réfléchie, une onde stationnaire plus ou moins idéale va s'établir dans le guide. On définit ainsi le **taux d'ondes stationnaire** par le rapport des amplitudes du champ électrique aux ventres et aux nœuds d'une onde dans le guide, soit :

$$TOS = |E_{\max}| / |E_{\min}| \approx \sqrt{V_{\max}/V_{\min}} \quad (13)$$

où la seconde égalité suppose que le détecteur est approximativement quadratique. Ce taux permet effectivement de quantifier la part d'ondes stationnaires dans le guide :

- Si dans la région étudiée seule une onde stationnaire est établie, alors on aura au niveau des nœuds $E_{\min} = 0$ et le TOS est infini.
- Si dans la région étudiée l'onde est purement progressive alors en moyenne temporelle $|E_{\max}| = |E_{\min}|$ et le TOS est égal à 1.
- Dans le cas général où, à l'extrémité de la ligne de mesure, une partie de l'onde est réfléchie et l'autre transmise au milieu, alors le système d'ondes est quelconque et le TOS prend une valeur intermédiaire.

On peut vérifier, en notant E_i l'amplitude du champ incidente et E_r celle du champ réfléchi à l'interface considérée (pour nous, l'extrémité de la ligne de mesure) que :

$$|E_{\max}| = |E_i| + |E_r| \quad , \quad |E_{\min}| = |E_i| - |E_r|, \quad \text{puis} \quad |E_r/E_i|^2 = \left(\frac{TOS - 1}{TOS + 1} \right)^2 \quad (14)$$

de sorte qu'on a en terme du coefficient de réflexion

$$|r| = \frac{TOS - 1}{TOS + 1} \quad (15)$$

Méthode approchée de mesure du TOS Dans le cas idéal où la réponse des détecteurs est effectivement quadratique il suffit, pour estimer le TOS , de déplacer le détecteur le long de la ligne de mesure et de noter les valeurs V_{\max} et V_{\min} du signal à l'oscilloscope puis d'en faire le rapport.

Estimer rapidement par cette méthode les valeurs du TOS pour un guide terminé par une extrémité ouverte, un court-circuit, un cornet et une charge adaptée, puis les classer par ordre de TOS croissant. Quelles étaient les valeurs que vous pouviez prévoir ?

[AP] Méthode précise : utilisation de l'atténuateur calibré Pour déterminer le TOS sans avoir à faire d'hypothèse sur la réponse (quadratique ou non) du détecteur, on peut procéder de la façon suivante :

- repérer un minimum en déplaçant la sonde dans la ligne de mesure et noter la déviation correspondante lue sur l'oscilloscope, ainsi que la valeur de l'atténuation (en dB) utilisée ;
- repérer un maximum et ajuster l'atténuation pour obtenir sur l'oscilloscope la même déviation que précédemment.

Ainsi le détecteur travaille à **niveau constant**. Le rapport $|E_{\max}| / |E_{\min}|$ s'obtient alors à partir de la différence des atténuations :

$$TOS = 10^{\frac{|A_2 - A_1|}{20}} \quad (16)$$

. Réaliser cette mesure pour le cornet et pour l'extrémité ouverte. Justifier l'utilisation d'un cornet pour transférer un maximum de puissance.

[AP] Phase de l'impédance La mesure approchée ou précise du TOS permet de remonter au module du coefficient de réflexion mais pas à sa phase. Pour se faire, il faut mettre en place le protocole suivant :

- Connecter l'élément inconnu Z (par exemple par le cornet) à la ligne de mesure et déterminer le TOS ainsi que la position d_Z d'un noeud. En ce point, l'onde réfléchie, qui a parcouru la distance supplémentaire $2d_Z$ par rapport à l'onde incidente, présente un retard de phase

$$\phi + 2\pi(2d_Z/\lambda_g) = (2n + 1)\pi$$
- Remplacer cet élément par un court-circuit placé à la sortie de la ligne de mesure. Le minimum précédemment étudié est déplacé en d_{cc} . En ce point, le retard s'écrit :

$$\pi + 2\pi(2d_{cc}/\lambda_g) = (2n + 1)\pi$$

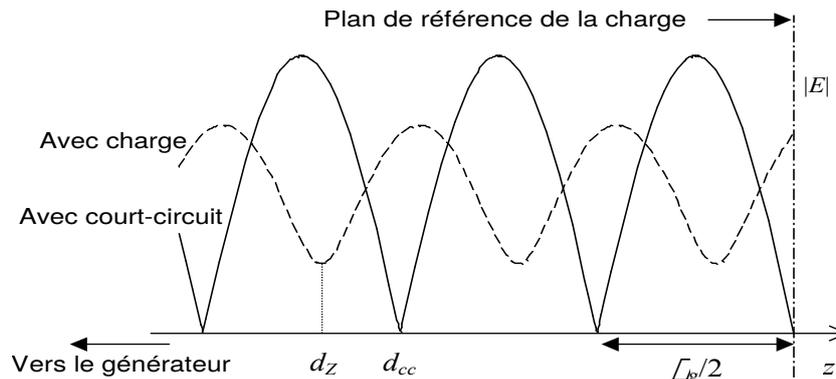


FIGURE 7 –

- On obtient ainsi la phase $\phi = \pi + 4\pi(d_{cc} - d_Z)/\lambda_g$ (modulo 2π).
- On en déduit r (complexe), puis le rapport Z/Z_0 , à mettre sous la forme $X + jY$.

5 Annexe - Mesure des caractéristiques d'un câble coaxial au LCR-mètre

On explique ici pourquoi il faut mettre un circuit-ouvert (resp. un court-circuit) en bout de ligne pour mesurer la capacité (resp. l'inductance) linéique du câble coax, et pourquoi il faut utiliser le LCR-mètre à basse fréquence.

5.1 Analogie mécanique

L'analogie électronique - mécanique usuelle repose sur l'identification entre :

- inductance et masse : $\mathcal{L} \longleftrightarrow m$,
- capacité et constante de raideur d'un ressort : $\mathcal{C} \longleftrightarrow 1/K$,
- intensité et vitesse : $i \longleftrightarrow v$,
- tension électrique et tension d'un ressort : $u \longleftrightarrow T$.
- Charge et position : $q \longleftrightarrow x$.

L'équation caractéristique d'une inductance $u = \mathcal{L} \frac{di}{dt}$ est alors l'équivalent du principe fondamental de la dynamique $T = m \frac{dv}{dt}$, et celle d'une capacité $u = q/\mathcal{C}$ l'équivalent de la relation caractéristique d'un ressort $T = Kx$.

Le câble coaxial, comme chaîne d'inductances et de capacités, est donc l'analogue électrique d'une chaîne de masses reliées par des ressorts.

Un circuit ouvert revient à annuler le courant en bout de ligne, i.e., par analogie électromécanique, à annuler la vitesse en bout de chaîne : l'extrémité B est comme fixée à une paroi immobile. Si l'on met en mouvement l'autre extrémité (A) de la chaîne à très basse fréquence (mouvement quasi statique), tous les points de la chaîne se déplacent en phase au cours de la déformation, et l'on va avoir l'impression de tirer sur un unique ressort. Plus on

tire lentement, plus les effets d'inertie diminuent alors que la force élastique, elle, ne change pas. C'est donc la raideur de la chaîne qui s'exprime et que l'on mesure essentiellement, i.e. du point de vue électrique, sa capacité.

Dans le cas d'un court-circuit, la tension en B est nulle ce qui correspond dans l'analogie mécanique à une extrémité libre de se déplacer. Si cette fois on tire infiniment lentement sur A, tous les points de la chaîne vont avoir le même mouvement, et les effets élastiques vont disparaître au profit des effets d'inertie. On aura alors l'impression de mettre en mouvement une masse solide et on comprend en revenant au point de vue électrique que le câble se comporte, à basse fréquence et en court-circuit, comme une inductance seule.

Un point majeur reste à éclaircir : qu'appelle-t-on basse fréquence ?

5.2 Calcul

Soit donc un câble de longueur L , d'inductance linéique Λ , de conductance linéique Γ , d'impédance caractéristique $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$. La vitesse de propagation d'une onde dans le câble est $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$. Considérons alors les deux situations suivantes : une réflexion sur un circuit ouvert ou sur un court-circuit d'une onde incidente $U_i(z, t) = V_0 \exp i(\omega t - kz)$.

Court-circuit

Le coefficient de réflexion est $\rho = -1$, et on a donc :

$$u(z, t) = 2V_0 \sin\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \sin(\omega t) \quad (17)$$

$$\text{et } i(z, t) = \frac{2V_0}{Z_c} \cos\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \cos \omega t$$

En passant en notations complexes, on a pour tout z :

$$\frac{u(z, t)}{i(z, t)} = -jZ_c \tan\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \quad (18)$$

Dans l'approximation $kL \ll 1$, et donc $k(z - L) \ll 1$, on trouve alors :

$$\frac{u(z, t)}{i(z, t)} \sim -jZ_c \frac{\omega}{c}(z - L) = -j[\Lambda(z - L)]\omega \quad (19)$$

Et en particulier :

$$\frac{u(0, t)}{i(0, t)} = j[\Lambda L]\omega = j\mathcal{L}\omega \quad (20)$$

Vu de son extrémité $z = 0$, le câble se comporte comme une inductance $\mathcal{L} = \Lambda L$!

Circuit ouvert

Le calcul est analogue dans le cas du circuit ouvert. On trouve dans ce cas :

$$\frac{u(z, t)}{i(z, t)} = -jZ_c \cot\left(\frac{\omega}{c}(z - L)\right) \quad (21)$$

et finalement :

$$\frac{i(0, t)}{u(0, t)} \sim j[\Gamma L]\omega = j\mathcal{C}\omega \quad (22)$$

Le câble se comporte alors, vu de $z = 0$, comme une capacité $\mathcal{C} = \Gamma L$.

Remarque

On voit bien ici apparaître que l'hypothèse $kL \ll 1$ est cruciale ! C'est pour cela que, contrairement aux situations habituelles, il faut utiliser le LCR-mètre à basse fréquence pour mesurer la capacité comme l'inductance du câble de 100m. En effet, $kL \ll 1$ implique pour $L = 100\text{m}$: $\nu \ll 100\text{kHz}$.