

Ecole Normale Supérieure, Sorbonne Université, Université Paris Sud

Préparation à l'agrégation de physique

PRINCIPES DES LASERS

Agnès MAITRE

Institut Des NanoSciences de Paris

Table des matières

| | | |
|------------|--------------------------------------------------------|-----------|
| I | Laser et cohérence | 3 |
| I.1 | Introduction | 3 |
| I.1.1 | Historique | 3 |
| I.2 | Cohérence | 4 |
| I.2.1 | mesure de l'intensité d'une onde plane | 4 |
| I.2.2 | Cohérence entre deux ondes monochromatiques | 6 |
| I.2.3 | Cohérence temporelle | 7 |
| I.2.4 | cohérence spatiale | 9 |
| I.2.5 | Application à la focalisation des ondes | 10 |
| I.3 | Conclusions | 11 |
| II | Faiceaux gaussiens | 13 |
| II.1 | Modes gaussiens | 13 |
| II.1.1 | Solutions des équations de Maxwell | 13 |
| II.1.2 | Faisceau gaussien | 15 |
| II.1.3 | Modes gaussiens d'ordre supérieurs | 18 |
| II.2 | Propagation d'un mode gaussien | 19 |
| II.2.1 | Paramètre q | 19 |
| II.2.2 | Matrices (ABCD) | 20 |
| III | Les cavités | 23 |
| III.1 | Le miroir | 23 |
| III.1.1 | Réflexion et transmission à une interface | 23 |
| III.1.2 | miroir diélectrique | 24 |
| III.2 | le Fabry-Pérot résonateur de modes | 25 |
| III.2.1 | Fabry-Pérot plan | 25 |
| III.2.2 | Etude de l'intensité transmise | 26 |
| III.2.3 | Le Fabry-Pérot comme analyseur de modes | 28 |
| III.2.4 | Résonance des modes gaussiens | 29 |
| III.2.5 | Cavités particulières | 31 |
| III.3 | Stabilité et mode propre d'une cavité | 31 |
| III.3.1 | Paramètres g_1 et g_2 en cavité linéaire | 32 |
| III.3.2 | Matrice (ABCD) | 34 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| IV Amplification optique par émission stimulée | 35 |
| IV.1 Les modèles | 35 |
| IV.1.1 Le modèle de Einstein | 35 |
| IV.1.2 Propagation d'une onde dans un milieu atomique | 37 |
| IV.2 Système à quatre niveaux | 39 |
| V Le laser stationnaire | 41 |
| V.1 Principes | 41 |
| V.1.1 Rappels | 41 |
| V.1.2 Les différents éléments | 42 |
| V.1.3 Fonctionnement | 42 |
| V.2 Equations de bouclage | 43 |
| V.2.1 Seuil d'oscillation | 44 |
| V.2.2 Emission au-dessus du seuil | 44 |
| V.2.3 Puissance et rendement | 45 |
| V.3 Largeur de raie | 45 |
| V.4 laser multimode/monomode longitudinal | 46 |
| V.4.1 Laser à élargissement homogène | 46 |
| V.4.2 laser à élargissement inhomogène | 46 |
| V.4.3 comment rendre monomode un faisceau multimode ? | 46 |
| VI Le laser dynamique | 49 |
| VI.1 Les equations couplées | 49 |
| VI.1.1 Equation d'évolution du champ dans une cavité Fabry-Pérot vide | 49 |
| VI.1.2 Equation d'évolution des populations | 50 |
| VI.1.3 Equation sur les photons | 51 |
| VI.1.4 Solutions stationnaires | 51 |
| VI.2 Oscillations de relaxation | 52 |
| VI.3 laser déclenché | 53 |
| VI.3.1 Les méthodes pour commuter le gain | 53 |
| VI.3.2 les équations de base | 54 |
| VI.4 Laser à blocage de modes | 56 |
| VI.4.1 expression de l'intensité | 56 |
| VI.4.2 Etude de $I(t)$ | 57 |
| VI.4.3 Comment bloquer la phase ? | 57 |
| VI.4.4 fréquence et dispersion dans un laser ultrarapide | 58 |
| VI.4.5 performances | 59 |
| VII Travaux dirigés : corrections | 61 |
| VII.1 faisceaux gaussiens | 61 |
| VII.1.1 transformation d'un faisceau gaussien | 61 |
| VII.1.2 adaptation d'un faisceau gaussien | 62 |
| VII.1.3 Résonance dans une cavité Fabry Pérot | 63 |
| VII.1.4 Stabilité et modes transverses d'une cavité | 67 |
| VII.1.5 Gain et puissance d'un laser | 68 |

Chapitre I

Laser et cohérence

I.1 Introduction

I.1.1 Historique

Quelques dates clés dans l'histoire des lasers. *L.A.S.E.R.* : Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (*M.A.S.E.R.* : Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

- 1917 : Albert Einstein : émission stimulée.
- 1949 : Alfred Kastler : Pompage optique et Inversion de population.
- 1950 : Weber, Townes, Basov, Prokhorov : proposition de dispositifs.
- 1960 : Maiman : réalisation du premier laser, un laser à rubis pulsé ($\lambda = 694.3nm$).
- 1961 : Première réalisation expérimentale d'un laser continu (Hélium-Néon $\lambda = 1,15\mu m$)
- 1962 : théorie du laser à semi-conducteur (Bernard et Durrafourg) et réalisation expérimentale (IBM et General Electric)
- 2000 : génération d'un supercontinuum dans une fibre photonique : le "laser blanc"
- 2010 : les 50 ans du laser

.1 Propriétés remarquables d'un laser Un laser est un dispositif qui produit ou amplifie un rayonnement pour des fréquences dans les domaines Infra-Rouge, Ultra-Violet et Visible du spectre électromagnétique. Un MASER est l'équivalent dans le domaine micro-onde. On associe au laser un certain nombre de propriétés remarquables qui sont pour la plupart directement associées à sa cohérence spatiale ou temporelle.

.2 Directivité Un laser est très faiblement divergent. Typiquement un laser émet sur quelques milliradians. A $1m$ son énergie est donc concentrée sur une tache de l'ordre de 1 à $10mm^2$. Pour un faisceau laser de puissance $1W$, dont la section a une taille de $1mm^2$, la densité surfacique est de $10^6W/m^2$ soit $100W/cm^2$! Pour un laser pulsé émettant des impulsions dont la durée est de l'ordre de la nanoseconde, on atteint facilement une puissance crête de $10^{15}W/cm^2$. Par comparaison une ampoule

électrique de 100 W (consommation électrique) émet 5 W lumineux sur 4π steradians. A un mètre, sa puissance lumineuse n'est que de $1W/m^2$. Le corollaire est donc qu'un laser est dangereux à partir de quelques mW.

a Laser accordable

En général, on considère le laser comme monochromatique. Il est possible de faire changer la longueur d'onde de certains lasers. Ils sont dits alors accordables. Les diodes lasers permettent de faire varier cette longueur d'onde de typiquement $\Delta\lambda = 10nm$. Un laser Titane Sapphire (Ti-Sa) permet peut être accordé sur une gamme spectrale large de 400nm ($700nm < \lambda < 1.1\mu m$). Cette largeur spectrale est beaucoup plus faible pour les lasers à gaz (typiquement quelques 10 MHz).

1.2 Cohérence

On dit que deux ondes sont cohérentes entre elles si on peut observer des interférences entre elles pendant qu'on mesure leur intensité. La notion de cohérence est donc intrinsèquement associée au temps de mesure. La notion de cohérence précise à quelle échelle temporelle ou spatiale l'information sur la phase d'une ou plusieurs ondes peut être conservée. Dans cette partie nous présenterons d'abord quelques notions sur la mesure d'une intensité et les détecteurs, puis nous introduirons successivement les notions de cohérence entre deux ondes, de cohérence temporelle puis de cohérence spatiale.

1.2.1 mesure de l'intensité d'une onde plane

Notions sur l'intensité mesurée par un détecteur. La puissance optique instantanée d'une onde électromagnétique est définie comme le flux du vecteur de Poynting. On peut alors écrire la relation suivante

$$P = \int \int \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad (I.1)$$

avec

$$\Pi = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = n\epsilon_0 c |E|^2 \quad (I.2)$$

En toute rigueur, l'intensité de l'onde est définie comme la norme du vecteur de Poynting et est donc égale à $\Pi = n\epsilon_0 c |E|^2$. Pratiquement, l'intensité mesurée correspond à la norme du vecteur de Poynting moyenné sur le temps de mesure. Nous appellerons I_{phys} l'intensité définie ainsi. Lorsque le champ électromagnétique s'exprime scalairement sous la forme

$$E = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (I.3)$$

et lorsque le temps de mesure est long devant la période de l'onde, l'intensité I_{phys} peut alors s'écrire de la façon suivante

$$I_{phys} = \frac{n}{2} \epsilon_0 c A^2 \quad (I.4)$$

Pour faciliter la manipulation des expressions, les opticiens travaillent en général en utilisant le champ complexe \tilde{E} qui vérifie $E = \text{Re}(\tilde{E})$. Ce champ complexe peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{E} = A e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{I.5})$$

Par souci de simplicité, et pour éviter d'alourdir les équations, les opticiens ont pour usage de définir l'intensité comme

$$I_{opt} = \langle \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* \rangle_{\text{temps de mesure}} = A^2 = 2 \langle |E|^2 \rangle_{\text{temps de mesure}} \quad (\text{I.6})$$

On montre la relation entre ces deux définitions de l'intensité

$$I_{opt} = \frac{2I_{phys}}{n\varepsilon_0 c} \quad (\text{I.7})$$

Dans la convention des opticiens, on obtient alors l'égalité suivante

$$I_{opt} = \langle \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* \rangle_{\text{temps de mesure}} = \left\langle \frac{2\Pi}{n\varepsilon_0 c} \right\rangle_{\text{temps de mesure}} \quad (\text{I.8})$$

Dans le cas particulier d'une onde plane mesurée par un détecteur de section S perpendiculaire à la direction de propagation du faisceau, on peut aussi écrire

$$I_{opt} = \left\langle \frac{2P}{n\varepsilon_0 c S} \right\rangle_{\text{temps de mesure}} \quad (\text{I.9})$$

Il est donc indispensable de bien définir le temps de mesure. Pour une onde monochromatique ou une onde dont la largeur spectrale est suffisamment étroite pour que $\Delta\nu T_{mesure} \ll 2\pi$, l'équation (??) précédente montre que l'intensité au sens des opticiens peut s'exprimer plus simplement sous la forme

$$I_{opt} = \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* \quad (\text{I.10})$$

que l'on écrit usuellement sous la forme simplifiée (mais abusive)

$$I_{opt} = E \cdot E^* \quad (\text{I.11})$$

Dans la suite, nous utiliserons la définition des opticiens pour l'intensité et écrirons systématiquement I à la place de I_{opt} .

L'intensité I s'écrit donc sous la forme $I_{opt} = \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* \simeq E \cdot E^*$.

Le temps caractéristique de la mesure dépend intrinsèquement du détecteur. L'œil par exemple est un détecteur très lent, dont le temps caractéristique d'intégration (le temps nécessaire pour avoir une image) est de $\frac{1}{25}$. Une photodiode a typiquement un temps caractéristique de réponse de 10^{-6} à 10^{-9} s. Pour une onde dont la longueur d'onde se situe au milieu du spectre visible ($\lambda = 600 \text{ nm}$), la période optique vérifie $T = \frac{\lambda}{c} = 210^{-15}$ s. Lorsque la puissance de cette onde est mesurée par une photodiode, l'énergie instantanée est moyennée sur un grand nombre de périodes. La conséquence est qu'il n'est pas possible de visualiser la fréquence optique en mesurant l'intensité lumineuse avec une photodiode

1.2.2 Cohérence entre deux ondes monochromatiques

a Interférence

On considère deux ondes planes E_1 et E_2 de même fréquence ω , de même polarisation et se propageant dans les mêmes direction et sens. Pour alléger les notations, on peut se contenter d'utiliser l'expression scalaire de ces champs (pas de polarisation) et de ne pas écrire la composante en e^{ikz} (direction de propagation des ondes). Par simplicité on considère que ces ondes ont la même amplitude A et on s'intéresse à leur interférence. Le champ résultant E vérifie

$$E = E_1 + E_2 = A(\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)) \quad (\text{I.12})$$

$$E = 2A[\cos(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \cos(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})] \quad (\text{I.13})$$

L'amplitude A vérifie $A^2 = I_1 = I_2$ ou I_1 et I_2 sont les intensités correspondant à chacune des ondes. L'intensité totale I vérifie donc

$$I = 2 \langle E^2 \rangle = 8A^2 \langle \cos^2(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \rangle \langle \cos^2(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) \rangle \quad (\text{I.14})$$

Le temps de mesure étant très long devant la période optique, la première moyenne vaut $1/2$. On peut alors écrire l'intensité sous la forme

$$I = 2A^2(1 + \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle) \quad (\text{I.15})$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme bien connue

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle \quad (\text{I.16})$$

Cependant les ondes planes parfaitement monochromatiques et de phase constante sont une limite idéale. Dans la réalité, la phase d'une onde réelle évolue dans le temps. Deux cas se présentent :

a.1 ondes cohérentes Lorsque le temps caractéristique d'évolution de la phase est lent par rapport au temps caractéristique de la mesure, $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ peut être considéré comme une constante à l'échelle de la mesure. On retrouve la relation classique d'interférence entre deux ondes

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{I.17})$$

Les deux ondes sont dites cohérentes. **Dans ce cas**, si on utilise l'expression complexe des champs, on retrouve bien que

$$I = (E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* \quad (\text{I.18})$$

On peut aussi remarquer qu'on parle de cohérence entre les ondes dès que la relation de phase entre les deux ondes est fixe (ou ne varie pas durant le temps de mesure). Attention la notion de cohérence n'implique aucune relation sur la valeur de la différence des phase. Deux ondes sont aussi bien cohérente si $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ (le contraste d'interférence est maximum) que si $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (le contraste d'interférence est nul).

Exemple : fentes d'Young On considère une onde plane éclairant un plan percé de deux trous d'Young séparés d'une distance d . On place une lentille parallèlement aux trous, après le plan percé. Qu'observe-t-on sur l'écran placé dans le plan focal objet de la lentille? Expliquer et calculer. Exprimer la différence de phase entre les deux sources secondaires.

Pour une onde se propageant perpendiculairement au plan percé.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda f} x \quad (\text{I.19})$$

a.2 Ondes incohérentes Lorsque la phase relative varie vite par rapport au temps caractéristique de la mesure, la valeur moyenne $\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle$ s'annule. L'intensité totale s'exprime alors sous la forme

$$I = I_1 + I_2 \quad (\text{I.20})$$

On dit alors que les ondes sont incohérentes l'une par rapport à l'autre.

Fentes d'Young Les sources secondaires peuvent-elles être incohérentes?

La cohérence d'une onde l'une par rapport à l'autre est donc intrinsèquement liée à la variation de la phase relative par rapport au temps de mesure. Ce n'est donc pas une propriété intrinsèque des ondes.

I.2.3 Cohérence temporelle

Quand il s'agit de cohérence entre deux ondes, c'est la phase relative qui est en jeu. Quand il s'agit de cohérence propre de l'onde, c'est sa phase qui compte.

Quand on parle de cohérence temporelle d'une onde, on ne s'intéresse qu'à la variation de la phase durant le temps de mesure.

L'interféromètre de Michelson est l'instrument qui permet de mesurer la cohérence temporelle d'une onde. Il permet de mesurer la variation de la phase de l'onde en fonction du temps.

On appelle L_1 et L_2 les longueurs optiques des deux bras de l'interféromètre. On s'intéresse aux interférences que l'on peut observer sur un écran. La figure d'interférence obtenue va dépendre de la différence de marche entre les deux ondes (secondaires) qui vont interférer. Cette différence est donnée par la relation ci-dessous

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k(L_1 - L_2) \quad (\text{I.21})$$

où k est le vecteur d'onde.

a Modèle simplifié des trains d'onde

Entre deux trains d'onde, la phase change aléatoirement. On appelle L_c la longueur de cohérence et τ_c le temps de cohérence. L_c et τ_c sont reliés par la relation suivante :

$L_c = c\tau_c$. La largeur de raie est ainsi reliée au temps de cohérence par

$$2\pi\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} \quad (\text{I.22})$$

Cette relation est obtenue par une transformée de Fourier de l'intensité.

Ce temps de cohérence τ_c est aussi appelé T_2 dans la littérature.¹

Un interféromètre de Michelson permet par division d'amplitude d'obtenir deux ondes secondaires. Par contre, si on les décale de plus que d'une longueur de cohérence, l.

On peut distinguer plusieurs situations

- le temps de mesure T_m est très supérieur au temps de cohérence τ_c
- Les deux trains d'onde sont décalés d'un temps $\delta t \ll \tau_c$

Cette situation correspond au cas où les deux trains d'onde sont décalés de $\Delta L = 2(L_2 - L_1) \ll l_c$.

Ces ondes secondaires ont la même phase relative et évoluent donc de manière quasi-cohérente. On observe des interférences, brouillées par un fond continu.

- Les deux trains d'onde secondaires sont décalés d'un temps $\delta t \approx \tau_c$ ($\Delta L = 2(L_2 - L_1) \approx l_c$)

La différence de phase entre les ondes secondaires varie aléatoirement. Les franges sont brouillées. Il n'y a plus d'interférence

- Les deux trains d'onde sont décalés d'un temps $\delta t \approx \tau_c$ ($\Delta L = 2(L_2 - L_1) > c$)
Les franges sont brouillées. Il n'y a plus d'interférence

Quand le temps de mesure T_m est beaucoup plus long que le temps de cohérence τ_c , on observera des interférences que si les trains d'onde sont décalés temporellement de $\delta t \ll \tau_c$.

- le temps de mesure T_m est très inférieur au temps de cohérence τ_c .
- Les deux trains d'onde sont décalés d'un temps $\delta t \ll \tau_c$.
Cette situation correspond au cas où les deux trains d'onde sont décalés de $\Delta L = 2(L_2 - L_1) \ll l_c$.
Dans cette situation, presque à chaque instant, on observe des interférences.
- Les deux trains d'onde sont décalés d'un temps $\delta t \approx \tau_c$ ($\Delta L = 2(L_2 - L_1) \approx l_c$).
Dans cette situation, presque à chaque instant, on observe des interférences.
- Les deux trains d'onde sont décalés d'un temps $\delta t \approx \tau_c$ ($\Delta L = 2(L_2 - L_1) > c$).

1. Dans des modèles plus élaborés, on parle du temps de vie (ou temps d'émission spontanée) T_1 qui correspond au temps caractéristique d'émission d'un photon par émission spontanée à partir d'un niveau excité d'un atome. Le temps de cohérence T_2 correspond au temps durant lequel la phase du train d'onde associée à ce photon peut être considérée comme constante. T_2 est toujours plus court que $2T_1$. Au mieux, à des températures cryogéniques, pour lesquelles les effets de décohérence sont minimum, $T_2 \leq 2T_1$ et tend vers T_1 .

Dans cette situation, presque à chaque instant, on observe des interférences.

Nous voyons ici que l'observation des interférences, donc de la variation de la phase à l'échelle de la mesure, est intrinsèquement liée au temps de mesure. Donc la notion de cohérence entre deux ondes doit se ramener à un questionnement sur la mesure.

b Calcul de la longueur de cohérence dans quelques cas particuliers

b.1 Lumière blanche $\Delta\lambda = 400nm$, $\lambda_1 = 400nm$, $\lambda_2 = 800nm$.

On trouve $\Delta\nu = 310^{14}Hz$ et $L_c = c\tau_c \sim 0.05\mu m$

b.2 Lampe à vapeur de mercure $\Delta\nu = 3GHz$, $\tau_c = \frac{1}{2\pi\Delta\nu} = 53ps$ la largeur spectrale est donnée par $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$ On trouve $L_c = 1,6cm$ et $\tau_c = 53ps$

On peut remarquer que plus la source est monochromatique, plus le temps de cohérence et la longueur de cohérence sont longs ($\Delta\nu \rightsquigarrow 0 \Rightarrow t_c \rightsquigarrow \infty, L_c \rightsquigarrow \infty$)

b.3 Laser HeNe continu monomode $\Delta\nu < 10MHz$. On trouve $\tau_c = 16ns$ et $L_c = 4.8m$.

le laser est dit monochromatique mais il a quand même une largeur spectrale qui est très faible. Le laser est dit cohérent.

En conclusion, la cohérence dépend de l'appareil de mesure.

- Il est possible de faire interférer deux lasers différents à condition que le temps de mesure soit plus court que le temps d'intégration de l'appareil de mesure.
- Pour rendre un laser plus cohérent, il faut le rendre plus monochromatique.

I.2.4 cohérence spatiale

On s'intéresse maintenant à l'aspect spatial de la cohérence. On considère qu'une source est composée de points sources. La question de la cohérence spatiale revient à savoir si ces points sources émettent en phase (ou avec une relation de phase fixe) avec les sources ponctuelles voisines. Si la relation de phase entre les différents points sources est aléatoire, la source est dite incohérente spatialement.

La manifestation la plus courante de la cohérence spatiale est le speckle. Le laser est cohérent spatialement : tous les points d'un front d'onde ont une relation déterministe entre eux. Lorsqu'un laser éclaire une feuille de papier, chaque grain de la feuille de papier diffuse la lumière et se comporte ainsi comme une source ponctuelle. La phase de ces ondes est fixée par la phase locale du laser. Comme le laser est cohérent spatialement la relation de phase est fixée entre deux grains source voisins. On voit alors des interférences liées à la diffusion par les grains de la source. le laser est cohérent spatialement. A contrario, on n'observe pas donc de speckle avec une lampe blanche, qui n'est pas cohérente spatialement.

Fentes d'Young L'expérience de fentes d'Young ne permet pas de savoir si l'onde est cohérente spatialement. Cette expérience montre comment il est possible d'obtenir des interférences même avec une source complètement incohérente spatialement.

1.2.5 Application à la focalisation des ondes

a Cohérence spatiale

L'optique géométrique permet de connaître le lieu où focalise une onde plane en s'appuyant sur une méthode de tracé de rayons.

La théorie de la diffraction offre un autre éclairage. On considère la lentille un élément diffractif. A la traversée de la lentille, chaque point de la source se comporte comme un point source et émet une onde sphérique. Toutes ces ondes secondaires interfèrent destructivement. Le point où l'onde plane focalise est l'unique point où le trajet optique est le même quelque soit le point source considéré et où les ondes interfèrent constructivement.

Cette approche d'optique géométrique, de "tracé de rayons", pour laquelle, une onde plane peut focaliser en un point, peut être complétée par une approche d'optique ondulatoire.

Pour focaliser un faisceau au maximum avec une lentille, il faut obtenir une interférence constructive dans la zone de focalisation. Par conséquent, la phase de la section du faisceau avant la lentille ne doit donc pas être aléatoire. La relation de phase entre différents point du front d'onde avant la lentille doit être déterministe. Il faut donc qu'il y ait cohérence spatiale.

Seul le laser, cohérent spatialement (donc dont la relation de phase entre différents points de son front d'onde, est déterministe) permet donc de focaliser au maximum à la limite de diffraction². On peut définir ainsi une aire de cohérence spatiale du faisceau pour laquelle tous les 'points' du faisceau ont entre eux une relation de phase déterministe. Pour une lumière sans cohérence spatiale, il ne sera pas possible d'atteindre cette focalisation ultime.

Si la cohérence spatiale est mauvaise, il faut corriger le front d'onde pour pouvoir focaliser plus. On utilise souvent des techniques d'optique adaptative qui permettent de modifier localement le front d'onde d'un faisceau.

b Cohérence temporelle

Au lieu de comprimer dans l'espace, il existe des techniques pour comprimer en temps. Le laser peut alors fonctionner en mode pulsé : Toute l'énergie du laser est concentrée en un temps très court et le laser délivre une impulsion très énergétique durant un laps de temps réduit.

Cette focalisation temporelle en des impulsions très courte est l'équivalent temporel de la focalisation spatiale où toute l'énergie du laser est concentré dans une zone petite de l'espace.

Le laser à modes bloqués permet d'obtenir des des champs très courts et très intenses qui peuvent aller jusqu'à $10^{15} W/cm^2$. Le champ électrique obtenu ainsi peut alors être supérieur au champ de Coulomb exercé par le proton sur l'électron d'un atome dans son état fondamental. On accède ainsi à une nouvelle échelle dans l'interaction laser-matière.

2. A la limite de diffraction, la tâche focale est de $\frac{\lambda}{2O.N.}$ où $O.N.$ est l'ouverture numérique de l'objectif utilisé

I.3 Conclusions

La cohérence d'une onde s'analyse comme la stationnarité de la phase à l'échelle de temps de la mesure. La cohérence est donc intrinsèquement liée au détecteur. Un laser est caractérisé par sa grande cohérence spatiale et temporelle ; Ses propriétés remarquables découlent de sa cohérence.

Les applications des lasers liés à la cohérence sont par exemple sa puissance, la focalisation, la directivité, la monochromaticité .

- Le laser comme lecteur de compact discs : focalisation, directivité
- Le laser comme lecteur de code barre= focalisation, directivité
- Vélocimétrie : monochromaticité
- fusion : puissance + focalisation
- télécommunication : modulation
- LIDAR : puissance+ monochromaticité
- Applications médicales : puissance + monochromaticité.
- applications de spectroscopie (accordable et monochromaticité)

Chapitre II

Faiceaux gaussiens

II.1 Modes gaussiens

Dans cette partie, nous trouverons l'expression du mode d'un laser. Pour cela nous allons résoudre les équations de Maxwell en cherchant une solution qui vérifie les mêmes propriétés qu'un laser (symétrie, divergence,

II.1.1 Solutions des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Nous allons essayer de résoudre cette équation (??) en faisant quelques approximations et en nous limitant aux solutions pouvant décrire un laser.

a Equations de Maxwell et approximation de l'enveloppe lentement variable

Nous cherchons une solution pour une onde électromagnétique, évoluant à la fréquence ω et se propageant dans la direction z . On peut alors écrire $\vec{E} = \varepsilon(r, z) e^{i(kz - \omega t)}$, r faisant référence à la coordonnée transverse ($r \equiv (x, y)$). On cherche une solution qui ne soit ni une onde plane, ni une onde sphérique. L'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\varepsilon e^{ikz}) e^{-ikz} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = 0 \quad (\text{II.2})$$

en regroupant les termes, cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varepsilon + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon - k^2 \varepsilon + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = 0 \quad (\text{II.3})$$

La relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ permet de supprimer les derniers termes. Nous allons maintenant supposer que l'enveloppe du champ ε varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde. En d'autres termes on peut considérer que l'enveloppe du champ

ne varie quasiment pas lorsque l'onde se propage de quelques λ . Plus formellement si l'enveloppe varie à une échelle z_e , on pourrait écrire que $\varepsilon \propto e^{\frac{z}{z_e}}$. L'hypothèse de l'enveloppe lentement variable consiste à dire que $z_e \gg \lambda$. On peut donc en déduire que $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon \sim \frac{\varepsilon}{z_e^2}$ et que $ik \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \sim \frac{1}{\lambda z_e} \varepsilon$. On en déduit donc que dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon \ll ik \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \quad (\text{II.4})$$

L'équation (??) se simplifie donc sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varepsilon + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon = 0 \quad (\text{II.5})$$

Les équations de Maxwell s'expriment donc sous la forme

$$\Delta_{\perp} \varepsilon + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon = 0 \quad (\text{II.6})$$

où $\Delta_{\perp} \varepsilon$ est le Laplacien transverse

b Ondes gaussiennes

On cherche une solution à cette équation qui puisse permettre de décrire une onde laser : extension finie, faible divergence, symétrie cylindrique. Les coordonnées cartésiennes sont transformées en coordonnées polaires.

$(x, y, z) \rightsquigarrow (r, z)$ et $\varepsilon(x, y, z) \rightsquigarrow \varepsilon(r, z)$.

En cylindrique, le laplacien transverse s'écrit sous la forme $\Delta_{\perp} \varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2}$.

On cherche une solution de la forme

$$\varepsilon(r, z) = u(z) e^{\frac{ikr^2}{2q(z)}} \quad (\text{II.7})$$

avec $q(z) \in \mathbb{C}$.

La symétrie cylindrique est évidente. L'extension finie et la divergence faible apparaîtront plus tard.

En reportant dans l'équation de Maxwell (??), la solution du champ attendue doit être indépendante de la variable r . On trouve alors $q' = 1$, d'où

$$q(z) = z - z_0 + iz_R \quad (\text{II.8})$$

z_R est une nouvelle constante appelée **longueur de Rayleigh**.

De même, on trouve $u' + \frac{u}{q} = 0$ d'où

$$u = \frac{C}{q} \quad (\text{II.9})$$

C est une constante que l'on exprime sous la forme $C = iz_R A_0$.

A_0 est une nouvelle constante appelée **amplitude**.

Il est donc possible d'écrire la fonction u sous la forme

$$u = \frac{i A_0 z_R}{z - z_0 + iz_R} \quad (\text{II.10})$$

et

$$\varepsilon(r, z) = \frac{i A_0 z_R}{z - z_0 + iz_R} \exp i \frac{k r^2}{2(z - z_0 + iz_R)} \quad (\text{II.11})$$

Après de longs calculs, on trouve

$$\varepsilon(r, z) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (z - z_0)^2/z_R^2}} \frac{-1 + i(z - z_0)/z_R}{\sqrt{1 + (z - z_0)^2/z_R^2}} e^{\frac{-k r^2}{2z_R [1 + (z - z_0)^2/z_R^2]}} e^{\frac{i k r^2}{2[(z - z_0) + z_R^2/(z - z_0)]}} \quad (\text{II.12})$$

On définit une nouvelle constante w_0 **appelée aussi waist (ou col) du faisceau gaussien**. Cette constante est reliée à la longueur de Rayleigh par

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{k w_0^2}{2} \quad (\text{II.13})$$

Il est alors possible de définir une nouvelle fonction $w(z)$ **appelée aussi rayon du faisceau**

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{(z - z_0)^2}{z_R^2}} \quad (\text{II.14})$$

On définit aussi, $R(z)$ **le rayon de courbure du faisceau gaussien**

$$R(z) = \frac{z_R^2}{z - z_0} + z - z_0 \quad (\text{II.15})$$

Enfin, on définit $\varphi(z)$ **la phase de Gouy du faisceau gaussien** qui vérifie

$$\tan \varphi(z) = -\frac{z - z_0}{z_R} \quad (\text{II.16})$$

Au final, l'équation (??) se simplifie et on obtient

$$\varepsilon(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} A_0 e^{i\varphi(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i \frac{k r^2}{2R(z)}} \quad (\text{II.17})$$

avec $\varepsilon(r, z, t) = \varepsilon(r, z) \exp i(kz - \omega t)$

$q(z)$ est le paramètre confocal qui détermine parfaitement le faisceau (comme z_0 et z_R)
 $w(z)$ caractérise le rayon du faisceau. w_0 est le rayon minimum du faisceau. $R(z)$ est le rayon de courbure
 $\varphi(z)$ est la phase de Gouy.

b.1 paramètre confocal On montre aisément que le paramètre confocal $q(z)$ vérifie

$$\frac{1}{R(z)} - \frac{i \lambda}{\pi w^2(z)} = \frac{1}{q(z)} \quad (\text{II.18})$$

b.2 col du faisceau On peut aussi remarquer qu'au col, $z = z_0$, $R(z_0) \rightsquigarrow \infty$ et $q(z_0) = iz_R$.

Au col $q(z_0)$ est imaginaire pur.

II.1.2 Faisceau gaussien

Nous allons maintenant étudier la relation (??) ci-dessus et en analyser les différents termes. Nous allons d'abord nous attacher aux termes de d'amplitude et d'énergie puis discuterons les termes de phase.

a Amplitude et énergie

Nous avons précédemment défini la puissance comme le flux du vecteur de Poynting.

$$P = \iint \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \rangle \quad (\text{II.19})$$

avec $\langle \Pi(r) \rangle = \frac{n\varepsilon_0 c I(r)}{2}$.

a.1 Amplitude et énergie en un plan de cote z donnée En un plan de cote z donnée, l'amplitude du faisceau s'exprime sous la forme

$$A(r) = \frac{w_0}{w(z)} A_0 e^{i\varphi(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \quad (\text{II.20})$$

Cette amplitude a bien une symétrie cylindrique. Son intensité locale $I(r) = |A(r)|^2$ est une gaussienne, d'intensité maximum au centre ($r = 0$).

Calculons la puissance du faisceau au niveau d'une section quelconque d'abscisse z. On peut exprimer la puissance totale du faisceau sous la forme suivante

$$P_{tot}(r) = \frac{2\pi\varepsilon_0 n c A_0^2 w_0^2}{2w(z)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} r dr \quad (\text{II.21})$$

En opérant le changement de variable $u = \frac{2r^2}{w^2(z)}$, on trouve $P_{tot} = \frac{\pi}{4} n \varepsilon_0 c A_0^2 w_0^2$. Cette quantité est indépendante de z. Comme on s'y attendait il n'y a pas donc pas de variation de la puissance au cours de la propagation. Cette propriété est vérifiée car $A(z) \propto \frac{w_0}{w(z)}$. En effet l'intensité (locale) varie comme l'inverse du rayon du faisceau, ce qui permet à la quantité $\int I dS$, proportionnel à la puissance totale du faisceau d'être constante.

a.2 Signification de w(z) w(z) est appelé taille du faisceau (ou waist en anglais). Pour un plan de cote z donnée, la section de rayon w(z) centré sur l'axe de propagation contient 86% de l'énergie. Calculons $P_{w(z)}$ l'énergie contenue dans une section de rayon w(z).

$$\int_0^{w(z)} e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} r dr = \int_0^2 \frac{1}{4} w^2(z) e^{-u} du = \frac{w^2(z)}{4} \int_0^2 e^{-u} du = 0.86 \frac{w^2(z)}{4} \quad (\text{II.22})$$

En posant $u = \frac{2r^2}{w^2(z)}$, on a $du = \frac{4r dr}{w^2(z)}$

On trouve donc que $P_{w(z)} = 0.86 P_{tot}$. 86% de l'énergie est donc contenue dans le cercle de rayon w(z).

a.3 Propagation suivant z La taille du faisceau gaussien $w(z)$ varie au cours de la propagation.

Commentons la relation $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)^2}$.

w_0 est le rayon minimum du faisceau (appelé aussi col). Pour $z = z_0 \pm z_R$ (zone de Rayleigh) alors $w(z) = \sqrt{2}w_0$.

Le rayon varie donc peu dans la zone de Rayleigh. Pour $z \gg z_R$, $w(z) = w_0 z / z_R$. L'onde diverge alors comme une onde sphérique centrée sur l'origine du faisceau gaussien.

b Phase

Après avoir étudié les termes d'amplitude, nous nous intéressons aux termes de phase de la relation (??). Nous discuterons d'abord de la courbure de l'onde gaussienne puis d'un terme de phase spécifiquement gaussien, la phase de Gouy.

b.1 Rayon de courbure Nous discutons dans ce paragraphe du terme $e^{ikr^2/2R(z)} e^{ikz}$. Commençons d'abord par discuter de la courbure d'une onde sphérique. Un point source situé en O émet une onde sphérique sous 4π stéradians.

Cette onde sphérique a pour expression au point M : $E(M) = \frac{A}{|OM|} e^{ik|OM|}$. Dans un repère cartésien, on peut exprimer $|OM|$ sous la forme $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On s'intéresse à l'émission de cette onde sphérique sous un faible angle solide centré sur l'axe d'abscisse z. On considère alors un repère cylindrique centré sur O, d'axe z et de coordonnée transverse r. Pour un angle solide suffisamment faible, z est grand devant r. On peut donc écrire

$$E(M) = \frac{A}{z} e^{i(kz \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}})} \quad (\text{II.23})$$

En coordonnées cylindriques $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'expression (??) ci-dessus peut s'exprimer sous la forme

$$E(M) = \frac{A}{z} e^{ikz} e^{\frac{ikr^2}{2z}} \quad (\text{II.24})$$

Pour la coordonnée z, la courbure de l'onde est égale à z.

Revenons maintenant à l'expression $e^{ikr^2/2R(z)} e^{ikz}$, terme que nous avons intitulé terme de courbure dans l'expression de l'onde gaussienne (??). En identifiant les deux relations précédentes concernant l'onde sphérique et l'onde gaussienne, $R(z)$ traduit la courbure de l'onde gaussienne, tout comme z traduit la courbure de l'onde sphérique.

- Quand $z \rightarrow \infty$, $R(z) \rightarrow z$. Dans cette limite, le terme dit de courbure prend la même expression que l'onde sphérique.
- Lorsque $z \ll z_R$, $\frac{z_R^2}{z} \rightarrow \infty$. On retrouve là le rayon de courbure de l'onde plane.

En conclusion, une onde gaussienne a un front d'onde quasi plan à l'intérieur de la zone de Rayleigh. Très loin de la zone de Rayleigh son front d'onde est sphérique.

En ce qui concerne son front d'onde, on assimile donc une onde gaussienne à une onde plane ou à une onde sphérique suivant si on a considéré des lieux situés dans ou loin de la zone de Rayleigh. Dans la zone intermédiaire $z \gtrsim z_R$, l'onde est spécifiquement gaussienne.

Remarquons aussi que pour $z < 0$, $R(z) < 0$ et que pour $z > 0$, $R(z) > 0$

b.2 Phase de Gouy Nous allons maintenant discuter du dernier terme dans l'expression de l'onde gaussienne (??). Ce terme s'exprime sous la forme : $e^{i\varphi(z)}$ avec $\tan(\varphi(z)) = -\left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)$.

-Lorsque $z \rightarrow \pm\infty, \varphi \rightarrow \pm\pi/2$

-Lorsque $z \rightarrow 0, \varphi \rightarrow 0$.

En optique géométrique, un déphasage de π s'observe de part et d'autre du point de focalisation. En optique gaussienne, un déphasage de π s'observe lors de la propagation d'une onde entre $z = -\infty$ et $z = \infty$. Cette phase spécifiquement gaussienne qui ne dépend que de z et pas de la coordonnée transverse, a ainsi un équivalent en optique géométrique.

c Divergence

Très loin de la zone de Rayleigh, on peut définir la divergence de l'onde. L'onde est assimilée à une onde sphérique, et l'angle de divergence s'exprime sous la forme :

$$\tan(\theta) \sim \theta = \frac{w(z)}{z - z_0} = \frac{w_0}{z - z_0} \sqrt{1 + \frac{(z - z_0)^2}{z_R^2}} \quad (\text{II.25})$$

Loin du col du faisceau, z est grand et la divergence (??) peut alors s'écrire sous la forme

$$\theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (\text{II.26})$$

En conclusion un faisceau gaussien est défini par son col et sa position. Les paramètres physiques importants sont w_0, z_R, θ

Faisons un calcul d'ordre de grandeur :

Pour $\lambda = 600nm$

| w_0 | z_R | α | taille | à la distance |
|-----------|---------|-------------|--------|---------------|
| $10\mu m$ | $0.5mm$ | 20 mrad | 2 cm | 1m |
| 1cm | 500 m | 20μ rad | 1 cm | 100m |

Lorsque un faisceau est large au col, il diverge peu et sa taille reste assez petite en s'éloignant de la zone de Rayleigh. A l'opposé, un faisceau ayant un diamètre de col (waist minimum) très petit, diverge vite, sa zone de Rayleigh est petite et sa divergence importante. Il acquière donc rapidement lors de sa propagation une taille importante.

II.1.3 Modes gaussiens d'ordre supérieurs

La solution précédente de l'équation (??) dans la partie précédente, n'est pas l'unique solution des équations de Maxwell qui vérifie les conditions aux limites décrivant le faisceau laser. On peut montrer que des solutions plus complexes peuvent être trouvées. Essentiellement celles-ci peuvent être regroupées dans deux grandes familles : les modes de Laguerre Gauss possédant une symétrie cylindrique, et les modes de Hermite Gauss possédant des symétries axiales en x et y . Nous décrivons ici principalement les modes de Hermite Gauss.

On peut montrer qu'une autre solution de l'équation (??) est le mode de Hermite Gauss TEM_{pq} qui s'exprime sous la forme suivante :

$$A_{pq}(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{\frac{-r^2}{w(z)^2}} e^{i\frac{kr^2}{2R(z)}} e^{i\varphi_{pq}(z)} H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \quad (\text{II.27})$$

H_p est un polynôme de Hermite qui vérifie la relation de récurrence suivante

$$H_0(x) = 1 \quad (\text{II.28})$$

$$H_1(x) = 2x \quad (\text{II.29})$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (\text{II.30})$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{II.31})$$

La phase de Gouy est maintenant donnée par

$$\varphi_{pq} = (p + q + 1) \text{Arctan}\left(\frac{z - z_0}{z_R}\right) \quad (\text{II.32})$$

Le mode de Hermite $E_{p,q}$ se caractérise par $(p + 1)(q + 1)$ max d'intensité et $p * q$ lignes noires (p verticales et q horizontales). Pour $p, q = 0$, on retrouve l'expression du mode fondamental $E_{0,0}$ discuté dans la première partie de ce chapitre.

quelques remarques :

Le rayon de courbure $R(z)$ est indépendant de p et q .

H_p et H_q sont des fonctions réelles.

II.2 Propagation d'un mode gaussien

Dans cette partie, nous allons décrire comment un faisceau gaussien se déforme au cours de sa propagation dans l'espace libre et à la traversée d'éléments optiques.

II.2.1 Paramètre q

Dans la section précédente, nous avons introduit $q(z) = z - z_0 + iz_R$, le paramètre confocal et montré que la connaissance de l'origine z_0 du faisceau et de la longueur de Rayleigh z_R était suffisante pour connaître complètement le mode gaussien fondamental idéal. Ce paramètre q vérifie la relation suivante

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (\text{II.33})$$

D'après cette relation, au col, le paramètre confocal est imaginaire pur.

$$q(z_0) = iz_R \quad (\text{II.34})$$

Nous allons maintenant décrire comment varie le paramètre q quand il se propage. On pourra en déduire ensuite toutes les propriétés du faisceau gaussien.

a Propagation libre

Nous nous intéressons à la propagation dans l'espace libre d'un faisceau gaussien entre l'abscisse z_1 et l'abscisse z_2 . On peut écrire

$$q(z_{1,2}) = z_{1,2} - z_0 + iz_R \quad (\text{II.35})$$

Les paramètres q sont donc reliés par la relation

$$q(z_2) = q(z_1) + z_2 - z_1 \quad (\text{II.36})$$

b Passage à travers une lentille

b.1 Optique géométrique On considère deux points A et B conjugués par une lentille de focale f et de centre C. Le point A émet une onde sphérique qui se focalise au point B. Juste avant la lentille, le rayon de courbure de l'onde sphérique émise peut s'écrire sous la forme $R_A = \overline{AC}$. De la même façon, le rayon de courbure de l'onde juste après la lentille, peut s'écrire sous la forme $R_B = \overline{BC}$. On peut remarquer que $R_A > 0$ et $R_B < 0$. D'après la relation de conjugaison des lentilles, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\frac{1}{\overline{CB}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{f} \quad (\text{II.37})$$

Par conséquent, on peut en déduire la relation conjuguant les rayons de courbure des ondes juste avant et juste après la lentille.

$$\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} = -\frac{1}{f} \quad (\text{II.38})$$

b.2 Optique gaussienne Nous appelons q_1 et q_2 les paramètres confocaux des ondes gaussiennes juste avant et juste après la lentille. A la traversée de la lentille, le diamètre de l'onde gaussienne n'est pas modifié ($w_1 = w_2$), par contre les rayons de courbures sont modifiés en suivant une loi équivalente à (??) ($\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{f}$). On peut donc en déduire la relation reliant les paramètres confocaux q_1 et q_2 . Dans cette relation R_1 et R_2 sont des valeurs algébriques.

$$\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} = -\frac{1}{f} \quad (\text{II.39})$$

Nous pouvons utiliser les relations (??) et (??) pour décrire la transformation d'un faisceau gaussien lors de sa propagation dans l'espace libre et lorsqu'il traverse des lentilles. Des relations plus complexes peuvent également être introduites pour traduire d'autres transformations. Néanmoins, nous utiliserons par la suite un formalisme matriciel plus efficace.

II.2.2 Matrices (ABCD)

Le formalisme des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ a un équivalent en optique géométrique. Nous ne l'aborderons pas ici.

a Formalisme

Nous cherchons à décrire l'évolution d'un faisceau gaussien entre une abscisse z_1 et une abscisse z_2 . Nous cherchons donc à établir une relation entre les paramètres confocaux q_1 et q_2 . On définit une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dont les coefficients vérifient

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{II.40})$$

On montre aisément que si une matrice $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ permet de transformer q_1 en q_2 et que si une matrice $(A_2 B_2 C_2 D_2)$ permet de transformer q_2 en q_3 , la matrice $(A_3 B_3 C_3 D_3)$ définie par la relation (??) ci-dessous permet de passer de q_1 à q_3 .

$$\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.41})$$

En résumé, pour exprimer le paramètre confocal final q_f en fonction du paramètre confocal initial q_i d'un faisceau gaussien, il faut calculer la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{\text{totale}}$ comme produit des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ élémentaires de chaque transformation (propagation, traversée de lentille).

Attention la multiplication des matrices est associative mais pas commutative : la première transformation subie par le faisceau doit être placée la plus à droite dans la multiplication.

De plus les matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ sont des matrices unitaires (leur déterminant est égal à 1) et vérifient

$$\mathbf{AD-BC=1} \quad (\text{II.42})$$

b Matrices courantes

Nous nous contenterons ici de donner les matrices caractérisant la propagation et la traversée d'une lentille. D'autres matrices peuvent être trouvées dans la littérature.

b.1 Propagation D'après la relation ??, la matrice traduisant la propagation de

z_1 à z_2 s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b.2 Traversée d'une lentille D'après la relation ??, la matrice traduisant la tra-

versée de la lentille mince de focale f , s'écrit sous la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

c Travaux dirigés : Application à la transformation des faisceaux

c.1 Transformation d'un faisceau gaussien par une lentille Un faisceau gaussien de rayon w_0 et de longueur de Rayleigh z_R est incident sur une lentille de focale f . On suppose que la lentille est à la distance $2d$ de la position du rayon de ceinture du faisceau incident. On fixe les caractéristiques du faisceau émergent de la façon suivante : sa longueur de Rayleigh est donnée par $z'R = d$ et la position de son rayon d'étranglement est située à la distance $2d$ de la lentille. (a)

- Calculer les couples f et z_R possibles pour que ces conditions soient réalisées.
- Déterminer le rayon d'étranglement des faisceaux incidents et émergents.
- Déterminer la taille du faisceau juste avant et juste après la lentille

- Déterminer le rayon de courbure du faisceau juste avant la lentille, juste après la lentille, à une distance $2d$ de la lentille.
- Calculer la divergence du faisceau émergent

c.2 Adaptation d'un faisceau gaussien Un faisceau gaussien de longueur de Rayleigh $z_R = d_1$ est incident sur une lentille de focale f . On suppose que la lentille est située à la distance d_1 de la position du rayon de ceinture du faisceau incident. On souhaite placer après la lentille une cavité linéaire dont le miroir le plus proche de la lentille, situé à la distance d_2 de celle-ci, est plan. Quelle doit être la focale pour que la courbure du faisceau gaussien " épouse " la forme du miroir ? en déduire la longueur de Rayleigh du faisceau après la lentille.

Chapitre III

Les cavités

III.1 Le miroir

III.1.1 Réflexion et transmission à une interface

On considère une interface entre un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2 . En incidence normale, les coefficients de réflexion $r_{1\setminus 2}$ du milieu 1 sur le milieu 2 (resp. $r_{2\setminus 1}$ de 2 sur 1) et de transmission $t_{1\rightarrow 2}$ du milieu 1 vers le milieu 2 (resp. $t_{2\rightarrow 1}$ de 2 sur 1) sont donnés par les expressions suivantes

$$r_{1\setminus 2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = r, r_{2\setminus 1} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} = -r, t_{1\rightarrow 2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = t, t_{2\rightarrow 1} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = t' \quad (\text{III.1})$$

On peut remarquer que $1 - r^2 = t t'$.

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la puissance d'une onde se calcule à partir du flux du vecteur de Poynting $P = \int \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$. Pour une onde plane (ou une onde gaussienne) se propageant dans un milieu d'indice n , la norme du vecteur de Poynting, s'exprime en fonction de l'intensité ($I = E \cdot E^*$) par la relation $\Pi = \frac{n}{2} \varepsilon_0 c I$

On considère deux ondes E_1 et E_2 arrivant sous incidence normale (direction de l'axe des z) sur une interface entre deux milieux semi infinis d'indice respectifs n_1 et n_2 . E_1 se propage dans le milieu d'indice n_1 et E_2 dans le milieu d'indice n_2 . L'onde E_4 (respectivement E_3) qui se propage dans le milieu n_1 (resp. n_2) dans le sens des z décroissants (resp. croissants), est obtenue par réflexion de l'onde E_1 (resp. E_2) sur l'interface et transmission de l'onde E_2 (resp. E_1) à travers l'interface. Les ondes E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) peuvent s'écrire sous la forme suivante (k et k' sont les vecteurs d'onde dans les milieux d'indice n_1 et n_2 respectivement) :

$$\begin{aligned} E_1(z, t) &= A_1 e^{i(\omega t - kz)} \\ E_2(z, t) &= A_2 e^{i(\omega t + k'z)} \\ E_3(z, t) &= A_3 e^{i(\omega t - k'z)} \\ E_4(z, t) &= A_4 e^{i(\omega t + kz)} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire au niveau de l'interface ($z = 0$)

$$\begin{aligned} E_3(0) &= t E_1(0) - r E_2(0) \\ E_4(0) &= r E_1(0) + t' E_2(0) \end{aligned}$$

On peut alors exprimer I_3

$$I_3 = t^2 I_1 + r^2 I_2 - rt(A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) \quad (\text{III.2})$$

De la même façon, I_4 s'exprime sous la forme suivante :

$$I_4 = r^2 I_1 + t'^2 I_2 + rt'(A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) \quad (\text{III.3})$$

En combinant les deux équations précédentes, on exprime $n_2 I_3 + n_1 I_4$

$$n_2 I_3 + n_1 I_4 = (n_2 t^2 + n_1 r^2) I_1 + (n_2 r^2 + n_1 t'^2) I_2 + 2r(-n_2 t + n_1 t')(A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) \quad (\text{III.4})$$

En remplaçant r , t et t' par leurs expressions [?], on obtient

$$n_2 I_3 + n_1 I_4 = \left(\frac{4n_1^2 n_2}{(n_1 + n_2)^2} + n_1 \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \right) I_1 + \left(\frac{4n_2^2 n_1}{(n_1 + n_2)^2} + n_2 \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \right) I_2 \quad (\text{III.5})$$

On en déduit la conservation de l'énergie

$$n_2 I_3 + n_1 I_4 = n_2 I_2 + n_1 I_1 \quad (\text{III.6})$$

Le flux d'énergie arrivant sur l'interface est égal au flux d'énergie partant de l'interface.

Nous avons donc vérifié la conservation de l'énergie ($P_1 + P_2 = P_3 + P_4$).

III.1.2 miroir diélectrique

Un miroir diélectrique est constitué par une succession périodique de couches $\lambda/4$ d'indice alterné. Le calcul exact des coefficients de réflexion et de transmission doit être effectué par des méthodes développées dans le domaine des couches minces (matrices de Abelès par exemple). Dans le cadre de ce cours, nous nous contenterons d'appeler r et t les coefficients de transmission et de réflexion en amplitude. Un miroir diélectrique est défini par une gamme spectrale de fonctionnement, un angle d'incidence, une polarisation et des coefficients de réflexion et de transmission qui peuvent être complexes. Le miroir est constitué par un empilement de couches minces et a donc une épaisseur de quelques λ . Nous le plaçons dans un milieu d'indice 1. Nous nous intéressons uniquement à ce qui est utile pour nous, c'est à dire les champs qui se propagent dans le milieu d'indice 1 et pas ce qui se passe dans le miroir.

On envoie deux champs E_1 et E_2 sur le miroir de part et d'autre. On obtient deux ondes E_3 et E_4 se propageant en sens inverse. Ces ondes vérifient la relation suivante au niveau du miroir ($z = 0$)

$$\begin{aligned} E_3(0) &= tE_1(0) - rE_2(0) \\ E_4(0) &= rE_1(0) + tE_2(0) \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que la transmission est la même de chaque côté du miroir et que le changement de signe dans la réflexivité assure la conservation de l'énergie. Dans la suite, nous considérons pour plus de simplicité que r et t sont réels.

III.2 le Fabry-Pérot résonateur de modes

III.2.1 Fabry-Pérot plan

On considère une cavité constituée de deux miroirs plans supposés infiniment minces et placés parallèlement l'un face à l'autre. Pour alléger les relations, nous considérons le cas où les deux miroirs ont les mêmes coefficients de réflexion et transmission, supposés réels. On définit un axe z perpendiculaire au plan des miroirs. Le premier miroir est placé en $z=0$ et le deuxième en $z=d$. Cette cavité a comme longueur d_0 macroscopique (de quelques mm à quelques m). La longueur d de la cavité peut varier de manière microscopique (quelques λ) autour de la longueur d_0 . On envoie une onde plane \vec{E}_i sur le premier miroir et qui se propage dans le sens des z croissants. Cette onde est réfléchiée et transmise par le premier miroir. Au sein de la cavité, les ondes peuvent être réfléchies par les deux miroirs ou être transmises par le premier miroir. Un calcul classique consiste à calculer les interférences entre les ondes oscillant aussi bien dans la cavité que transmises ou réfléchies par la cavité. Ici nous privilégierons une approche plus globale où nous calculerons directement les ondes en présence dans ce système. Nous appelons \vec{E}_c l'onde se propageant dans la cavité dans le sens des z croissants et \vec{E}'_c l'onde se propageant dans la cavité dans le sens des z décroissants. L'onde plane se propageant après la cavité dans le sens des z croissants est appelée \vec{E}_t . L'onde réfléchiée par la cavité se propageant dans le sens des z décroissants est appelée \vec{E}_r .

Ce système étant isotrope, la polarisation ne joue pas de rôle et nous nous intéresserons aux champs scalaires. Les champs s'exprimeront donc sous la forme

$$E_i = A_i e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$E_c = A_c e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$E'_c = A'_c e^{-i(\omega t + kz)}$$

$$E_t = A_t e^{-i(\omega t - kz)}$$

$$E_r = A_r e^{-i(\omega t + kz)}$$

Ecrivons les relations au niveau de chaque miroir.
en $z=0$

$$E_c(0) = tE_i(0) + rE'_c(0) \quad (\text{III.7})$$

$$E_r(0) = tE'_c(0) - rE_i(0) \quad (\text{III.8})$$

en $z=d$

$$E_t(d) = tE_c(d) \quad (\text{III.9})$$

$$E'_c(d) = rE_c(d) \quad (\text{III.10})$$

On peut en déduire une relation entre les amplitudes

$$A_c = tA_i + rA'_c \quad (\text{III.11})$$

$$A_r = tA'_c - rA_i \quad (\text{III.12})$$

$$A_t = tA_c \quad (\text{III.13})$$

$$A'_c = rA_c e^{2ikd} \quad (\text{III.14})$$

La résolution de ces équations donne comme valeur pour les amplitudes

$$A_c = \frac{tA_i}{1 - r^2 e^{2ikd}} \quad (\text{III.15})$$

$$A'_c = \frac{rtA_i e^{2ikd}}{1 - r^2 e^{2ikd}} \quad (\text{III.16})$$

$$A_r = tA'_c - rA_i \quad (\text{III.17})$$

$$A_t = \frac{t^2 A_i}{1 - r^2 e^{2ikd}} \quad (\text{III.18})$$

$$A_r = rA_i \frac{e^{2ikd} - 1}{1 - r^2 e^{2ikd}} \quad (\text{III.19})$$

$$(\text{III.20})$$

En utilisant la relation $R + T = 1$ (avec $r^2 = R$ et $t^2 = T$), on peut trouver la relation reliant l'intensité I_c en fonction de l'intensité incidente

$$I_c = \frac{TI_i}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(2kd)} \quad (\text{III.21})$$

Cette relation peut plus concisément s'exprimer sous la forme ($m = \frac{4R}{T^2}$)

$$I_c = \frac{1}{T} \frac{I_i}{1 + m \sin^2 kd} \quad (\text{III.22})$$

On en déduit les relations liant les autres intensités à l'intensité incidente

$$I_t = \frac{I_i}{1 + m \sin^2 kd} \quad (\text{III.23})$$

$$I'_c = \frac{R}{T} \frac{I_i}{1 + m \sin^2 kd} \quad (\text{III.24})$$

$$I_r = I_i \frac{m \sin^2 kd}{1 + m \sin^2 kd} \quad (\text{III.25})$$

$$(\text{III.26})$$

Nous pouvons vérifier que $I_R + I_t = I_i$. En régime stationnaire, l'énergie stockée dans le Fabry-Pérot ne croit pas et toute l'énergie injectée est soit transmise soit réfléchie.

III.2.2 Etude de l'intensité transmise

Nous allons étudier l'intensité transmise en fonction de l'épaisseur d du Fabry-Pérot. Celle-ci vérifie la relation

$$I_t = \frac{I_i}{1 + m \sin^2 kd} \quad (\text{III.27})$$

Pour des distances d vérifiant $d = p\lambda/2$ (p est entier), I_t est maximum et I_r est minimum. Dans le cas particulier étudié ici, où les deux miroirs sont identiques, $I_t = I_i$ et $I_r = 0$. Il y a interférences constructives au sein de la cavité.

Pour des distances d vérifiant $d = \lambda/4 + p\lambda/2$, I_t est minimum et I_r est maximum. Dans le cas particulier étudié ici, où les deux miroirs sont identiques, $I_t = \frac{I_i}{1+m}$ et $I_r = I_i \frac{m}{1+m}$. Il y a interférences destructives au sein de la cavité.

.1 Résonance Prenons un exemple : pour $R=90\%$, $m=360$; pour $R=50\%$, $m=8$

Pour observer deux résonances successives, il est nécessaire de faire varier la longueur de $\Delta d = \lambda/2$. Cette variation de longueur est très petite en valeur relative ($\frac{\Delta d}{d_0} \approx 10^{-6}$ pour une cavité de $d_0 = 10\text{cm}$)

.2 Finesse de la cavité Nous cherchons les longueurs pour lesquelles $I_t(d) = \frac{I_{max}}{2}$. Nous résolvons donc l'équation suivante

$$1 + m \sin^2(kd) = 2 \quad (\text{III.28})$$

Les longueurs d solutions de cette équation vérifient, pour $m \gg 1$

$$d = p \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{m}} \quad (\text{III.29})$$

où p est un entier et m est un paramètre caractérisant la qualité des miroirs définis plus haut ($m = \frac{R}{T^2}$) La largeur δd à mi-hauteur est donc définie par

$$\delta d = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{m}} \quad (\text{III.30})$$

On définit la finesse F comme le rapport la distance permettant d'obtenir deux résonances successives sur la largeur à mi-hauteur. Celle-ci vérifie

$$F = \frac{\pi\sqrt{m}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{T} \quad (\text{III.31})$$

Quand les miroirs de la cavité sont très réfléchissants ($R \approx 1$), $F = \frac{\pi}{T}$ Dans la cavité, que nous étudions, les seules pertes de la cavité sont données par les pertes par transmission des miroirs et sont égales à $2T$. La finesse peut être exprimée sous la forme

$$F = \frac{2\pi}{\text{Pertes}} \quad (\text{III.32})$$

Cette relation reliant la finesse aux pertes peut être généralisée à toute cavité dont les pertes sont très faibles (Pertes $\ll 1$).

.3 Finesse et facteur de qualité Le facteur de qualité caractérise un système résonant. Il traduit comment une oscillation s'amortit quand l'excitation cesse. Le facteur de qualité pour un système s'estime en faisant le ratio entre les pertes d'énergie et l'énergie stockée dans la cavité. On exprime le facteur de qualité Q en fonction de l'énergie stockée W dans la cavité et de la pulsation optique ω :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega}{Q}W \quad (\text{III.33})$$

Dans une cavité linéaire de section transverse S , W l'énergie stockée dans la cavité est donnée par

$$W = \frac{d_0}{c}(\Pi_c + \Pi'_c)S \quad (\text{III.34})$$

Π_c et Π'_c sont les vecteurs de Poynting des ondes se propageant dans la cavité dans chacun des sens ($P = \int \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$).

$\frac{d_0}{c}$ correspond au temps nécessaire pour se propager dans la cavité (dans un sens).

La puissance perdue $-\frac{dW}{dt}$, correspond à ce qui est perdu par les miroirs par la transmission de l'onde stockée dans la cavité vers l'extérieur. Cette puissance peut s'exprimer sous la forme

$$-\frac{dW}{dt} = T(\Pi_c + \Pi'_c)S = \frac{TWc}{d_0} \quad (\text{III.35})$$

On peut en déduire donc la valeur du facteur de qualité Q

$$Q = \frac{\omega d_0}{Tc} = \frac{2\pi d_0}{T\lambda} \quad (\text{III.36})$$

Nous pouvons remarquer que dans le cas des cavités macroscopiques étudiées ici $\frac{d_0}{\lambda}$ est très grand et donc Q est grand. Par ailleurs plus la cavité est résonante (T petit) plus le facteur de qualité augmente.

Ordre de grandeur Cavité de longueur 10cm , fonctionnant à une longueur d'onde de $\lambda = 600\text{nm}$ avec $T = 1\%$. On trouve $Q = 10^8$.

Dans le cas où les miroirs de la cavité sont très réfléchissants ($T \approx 0$), on peut exprimer la relation entre la finesse F et le facteur de qualité Q .

$$F = Q \frac{\lambda}{2d_0} \quad (\text{III.37})$$

III.2.3 Le Fabry-Pérot comme analyseur de modes

Nous allons commencer par calculer quelques ordres de grandeur. Nous considérons une cavité linéaire de longueur macroscopique d_0 que nous supposons résonante pour la longueur d'onde λ . Cette longueur peut donc s'exprimer sous la forme $d_0 = p_0 \frac{\lambda}{2}$. Pour une cavité de longueur $d_0 = 10\text{cm}$ et $\lambda = 600\text{nm}$, la valeur de $p_0 = 3 \cdot 10^5$ est très grande. Par conséquent, quand on balaie la longueur de la cavité de quelques longueurs d'onde, la valeur de l'entier p varie de quelques unités.

On peut aussi calculer la valeur du facteur $\frac{c}{2d_0}$ appelé aussi intervalle spectral libre (ISL) : $\frac{c}{2d_0} = 1.510^9 \text{Hz}$. La fréquence optique ν_1 ayant comme valeur $\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 5 \cdot 10^{14} \text{Hz}$, on peut négliger l'intervalle spectral libre devant la fréquence optique ($\frac{c}{d_0} \ll \nu_1$).

a Résonance de deux ondes dont la différence de fréquence est égale à l'intervalle spectral libre

Considérons que nous injectons maintenant ce Fabry-Pérot avec deux ondes planes de fréquence ν_1 et ν_2 qui vérifient la relation $\nu_2 = \nu_1 + \frac{c}{2d_0}$. L'onde 1 résonne pour des longueurs d_1^p telles que $d_1^p = \frac{p\lambda_1}{2}$. De même l'onde 2 résonne pour des longueurs $d_2^p = \frac{p\lambda_2}{2}$.

On peut aussi écrire

$$d_2^p = \frac{pc}{2\nu_2} = \frac{pc}{2(\nu_1 + \frac{c}{2d_0})} \quad (\text{III.38})$$

soit, en faisant un développement limité au premier ordre en $\frac{c}{2\nu_1 d_0}$,

$$d_2^p = \frac{pc}{2\nu_1} \left(1 - \frac{c}{2d_0\nu_1}\right) = \frac{(p-1)c}{2\nu_1} \quad (\text{III.39})$$

car $\frac{p_0c}{2\nu_1 d_0} \approx 1$. On en déduit donc que

$$d_2^p = d_1^{p-1} \quad (\text{III.40})$$

Donc l'onde 2 résonne pour les mêmes longueurs que l'onde 1 si sa fréquence est décalée par rapport à l'onde 1 d'un intervalle spectral libre (ou un multiple d'un intervalle spectral libre).

b Résonance de deux ondes dont la différence de fréquence est inférieure à l'intervalle spectral libre

On considère maintenant une onde 3 dont la fréquence vérifie $\nu_3 = \nu_1 + \frac{\alpha c}{2d_0}$ avec $0 < \alpha < 1$. On montre alors que

$$d_3^p = \frac{pc}{2\nu_1} \left(1 - \frac{\alpha c}{2d_0\nu_1}\right) = d_1^p - \frac{\alpha c}{2\nu_1} \quad (\text{III.41})$$

Si on appelle δd la variation de longueur permettant la résonance de deux modes successifs et Δd la variation de longueur de la cavité permettant d'observer deux résonances successives du même mode, on montre que

$$\alpha = \frac{\delta d}{\Delta d} = \frac{\nu_3 - \nu_1}{ISL} \quad (\text{III.42})$$

Un Fabry Pérot permet donc de mesurer avec une grande précision des variations relatives de fréquences

c Pouvoir de résolution

Le pouvoir de résolution indique la différence de fréquence minimum qui peut être mesurée par le Fabry-Pérot.

Une différence de fréquence $\Delta\nu$ peut être mesurée tant que

$$\Delta\nu \geq \frac{ISL}{F} = \frac{c}{2d_0 F} \quad (\text{III.43})$$

Pour les cavités linéaires de grande finesse, on peut écrire

$$\Delta\nu \geq \frac{cT}{2d_0\pi} \quad (\text{III.44})$$

Pour $R = 0.9$, on trouve un pouvoir de résolution de $80MHz$.

III.2.4 Résonance des modes gaussiens

Dans cette section, la cavité n'est pas constituée par une paire de miroirs plans mais par une paire de miroirs sphériques, que nous supposons de courbure R_1 et R_2 .

a Mode gaussien fondamental

Pour qu'un mode gaussien résonne dans une telle cavité, il est nécessaire que le rayon de courbure de l'onde gaussienne épouse la forme du miroir. L'expression de l'onde gaussienne est

$$\varepsilon(r, z) = \frac{w_0}{w(z)} A_0 e^{i\varphi(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i\frac{kr^2}{2R(z)}} \quad (\text{III.45})$$

Il y a résonance lorsque le déphasage sur un aller-retour est égal à $2p\pi$. Dans le cas d'une cavité de longueur d_0 et dont les deux miroirs se trouvent à la position z_1 et z_2 , il faut que le déphasage sur un aller soit tel que $\Delta\varphi = p\pi$. Pour une onde gaussienne TEM_{00} , la phase de Gouy vérifie

$$\varphi(z) = -\text{Arctan} \frac{z - z_0}{z_R} \quad (\text{III.46})$$

On trouve alors que le déphasage sur un aller est

$$kd - \arctan \frac{z_1 - z_0}{z_R} + \arctan \frac{z_2 - z_0}{z_R} = p\pi \quad (\text{III.47})$$

Dans le cas particulier où la cavité est symétrique, on peut poser $z_2 = -z_1 = \frac{d_0}{2}$. La relation précédente devient alors

$$kd + 2 \arctan \frac{d_0}{2z_R} = p\pi \quad (\text{III.48})$$

On peut alors exprimer la condition de résonance sous la forme

$$k(d + \epsilon) = p\pi \quad (\text{III.49})$$

avec

$$k\epsilon = 2 \arctan \frac{d_0}{2z_R} \quad (\text{III.50})$$

b Mode gaussien supérieur

La phase de Gouy d'un mode gaussien d'ordre supérieur s'exprime sous la forme

$$\varphi(z) = -(m + n + 1) \text{Arctan} \frac{z - z_0}{z_R} \quad (\text{III.51})$$

On en déduit la condition de résonance dans une cavité symétrique

$$kd + 2(m + n + 1) \arctan \frac{d_0}{2z_R} = p\pi \quad (\text{III.52})$$

On peut alors exprimer la condition sous la forme

$$k(d + (m + n + 1)\epsilon) = p\pi \quad (\text{III.53})$$

On montre ainsi que dans une cavité, en général, pour une famille de modes TEM_{mn} donnée (construite à partir de son mode TEM_{00} , les modes gaussiens ne résonnent pas pour une même longueur. Mais il y a ainsi dégénérescence pour les modes gaussiens pour lesquels la somme $m + n$ est identique : en effet ils résonnent pour la même longueur de cavité.

III.2.5 Cavités particulières

.1 **Lineaire** $ISL = \frac{c}{2d_0}$

.2 **en anneau** $ISL = \frac{c}{d_0}$

.3 **confocale** La cavité confocale est une cavité linéaire formée de 2 miroirs convexes de rayon de courbure R et distants de R . Ses caractéristiques vérifient les relations suivantes ; $ISL = \frac{c}{4d_0}$ $z_R = \frac{d_0}{2}$ et $\epsilon = \frac{\lambda}{4}$

La cavité confocale est une cavité très particulière.

— *Optique géométrique*

Un schéma d'optique géométrique montre que n'importe quel rayon se reboucle sur lui-même en 2 aller retours. Seul le rayon porté par l'axe se reboucle sur lui-même en un seul aller-retour. On retrouve là que l'intervalle spectral libre de la cavité est égal à $\frac{c}{4d_0}$

— *Optique gaussienne*

Sur un aller, on peut calculer la variation $\Delta\phi$ due à la phase de Gouy. Le déphasage total dû à la phase de Gouy sur un aller retour est égal à $\Delta\phi_{tot} = 2\Delta\phi$
On peut donc écrire

$$\Delta\phi_{tot} = (m + n + 1)\pi \quad (\text{III.54})$$

Cette relation montre que tous les modes pairs ($m + n$ pair) résonnent pour les mêmes longueur de cavité. De même, tous les modes impairs ($m + n + 1$ impair) sont des modes dégénérés de la cavité. On retrouve ainsi que les modes pairs, tout comme les modes impairs entre eux, résonnent pour des longueurs de cavités différent de $\frac{\lambda}{2}$. On peut passer d'une résonance paire à une résonance impaire en décalant la longueur de la cavité de $\frac{\lambda}{4}$. On retrouve ainsi un Intervalle spectral libre apparent de la cavité confocale égal à $\frac{c}{4d_0}$

III.3 Stabilité et mode propre d'une cavité

Une cavité est dite stable s'il existe un mode qui résonne dans cette cavité : il se superpose identique à lui-même sur un tour (cavité en anneau) ou un aller-retour (cavité linéaire). Il subit un déphasage dû à sa propagation sur un tour (ou un aller-retour) dans la cavité égal à un multiple de 2π .

Un tel mode dont la distribution transverse se superpose sur elle-même après un tour dans la cavité est appelé mode propre de la cavité. Cette résonance ici définie par ses caractéristiques spatiales, est associée à un mode transverse TEM_{mn} . Le déphasage multiple de 2π fait appel à une notion spatiale (phase de Gouy) et à une notion temporelle (déphasage lors de la propagation (terme en e^{ikz})).

Dans une cavité linéaire, on montre que le mode propre est tel que sa courbure "épouse" la forme des miroirs. Au sein d'une même famille de modes gaussiens (définie à partir d'un mode TEM_{00} et qui possèdent donc tous le même rayon de courbure $R(z)$), si le mode TEM_{00} est mode propre de la cavité, tous les modes TEM_{mn} de la famille sont des modes propres de la cavité. Dans les paragraphes suivants, nous

établirons les conditions pour lesquelles il existe un mode propre TEM_{00} de la cavité et nous définirons ce mode.

III.3.1 Paramètres g_1 et g_2 en cavité linéaire

a Conditions aux limites

On utilise les conditions aux limites. En cavité linéaire, les miroirs sont des surfaces d'onde des faisceaux.

Dans le cas d'une cavité linéaire convexe-convexe comportant un miroir de rayon de courbure R_1 en z_1 et un miroir de rayon de courbure R_2 en z_2 , on a les relations ci-dessous. Pour alléger les notations, on choisit l'origine du repère en z_0 (z_0 est la position du waist minimum du mode gaussien)

$$\begin{aligned} R(z_1) &= -R_1 \\ R(z_2) &= R_2 \\ z_2 - z_1 &= d \end{aligned}$$

R_1 et R_2 sont choisis positifs car les miroirs sont convexes. On cherche donc à résoudre le système de trois équations

$$-R_1 = z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} \quad (\text{III.55})$$

$$R_2 = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} \quad (\text{III.56})$$

$$z_2 - z_1 = d \quad (\text{III.57})$$

Les inconnues sont z_1 , z_2 et z_R la longueur de Rayleigh du mode cherché. La coordonnée $z = 0$ correspond par définition à la position du col du faisceau. Ces paramètres ne dépendent que de la cavité et pas de λ .

On définit le paramètre g de la façon suivante

$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1} \quad (\text{III.58})$$

$$g_2 = 1 - \frac{d}{R_2} \quad (\text{III.59})$$

Les solutions des équations sont :

$$z_R^2 = \frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} d^2 \quad (\text{III.60})$$

$$z_1 = -\frac{g_2 (1 - g_1) d}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (\text{III.61})$$

$$z_2 = \frac{g_1 (1 - g_2) d}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (\text{III.62})$$

a.1 Application au cas symétrique $g_1 = g_2 = g$

$$z_R^2 = \frac{g^2(1-g^2)}{(2g-2g^2)^2} d^2 = \frac{1+g}{4(1-g)} d^2 \quad (\text{III.63})$$

$$z_1 = -\frac{g(1-g)d}{2g-2g^2} = -\frac{d}{2} \quad (\text{III.64})$$

$$z_2 = \frac{g(1-g)d}{2g-2g^2} = \frac{d}{2} \quad (\text{III.65})$$

a.2 Calcul direct : uniquement dans le cas symétrique Le système d'équations à résoudre se simplifie en

$$z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} = R \quad (\text{III.66})$$

Cette équation se simplifie en

$$z_R^2 = \frac{d^2}{4} \left(\frac{2R}{d} - 1 \right) \quad (\text{III.67})$$

On en déduit la condition de stabilité

$$2R > d \quad (\text{III.68})$$

a.3 Application au cas plan convexe

$$R = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} \quad (\text{III.69})$$

$$z_1 = 0 \quad (\text{III.70})$$

$$z_2 = d \quad (\text{III.71})$$

On en déduit

$$z_R^2 = (R-d)d \quad (\text{III.72})$$

soit la condition de stabilité

$$R > d \quad (\text{III.73})$$

b Cas général

z_R^2 n'est pas toujours défini si

$1 - g_1g_2 < 0$ et $g_1g_2 > 0$ soit $g_1g_2 > 1$

$1 - g_1g_2 > 0$ et $g_1g_2 < 0$ soit $g_1g_2 < 0$

$g_1 + g_2 - 2g_1g_2 = 0$ soit $g_2 = \frac{g_1}{2g_1-1}$

En conclusion, pour qu'une cavité linéaire soit stable, il faut que

$$0 < g_1g_2 < 1 \quad (\text{III.74})$$

Remarque : une cavité peut être stable avec un miroir concave ($R < 0$) mais ne peut être stable avec deux miroirs concaves qui vérifient ($g_1g_2 > 1$)

III.3.2 Matrice (ABCD)

On considère dans une cavité (linéaire ou en anneau) un plan de référence et on "déplie" la cavité à partir de ce plan de référence. On exprime alors la matrice (ABCD) de la matrice dépliée. Enfin on exprime que le paramètre confocal q est le même au début et à la fin de la cavité dépliée.

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} = q_1 \quad (\text{III.75})$$

On résout alors cette équation du second degré.

$$0 = C + \frac{(D - A)}{q_1} - \frac{B}{q_1^2} \quad (\text{III.76})$$

On trouve alors que

$$\frac{1}{q_1} = \frac{D - A \pm \sqrt{\Delta}}{2B} \quad (\text{III.77})$$

avec

$$\Delta = (D - A)^2 + 4BC \quad (\text{III.78})$$

Or $AD - BC = 1$, on en déduit donc que

$$\Delta = (D + A)^2 - 4 \quad (\text{III.79})$$

le paramètre confocal vérifie

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (\text{III.80})$$

le paramètre confocal q n'est pas un réel et par conséquent $\Delta < 0$. On en déduit donc la condition de stabilité d'une cavité décrite par sa matrice ABCD

$$-1 < \frac{A + D}{2} < 1 \quad (\text{III.81})$$

Pour connaître les paramètres du système, on identifie les termes du paramètre confocal

$$\frac{1}{R} = \frac{D - A}{2B} \quad (\text{III.82})$$

et

$$\frac{\lambda}{\pi w^2(z)} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{B} \quad (\text{III.83})$$

où $m = \frac{D+A}{2}$

Attention la matrice (ABCD) dépend du plan de référence. En général il est pratique de le plan de référence une fois qu'on a étudié les symétries du système et localisé le col du faisceau. Pour simplifier les calculs, il est judicieux de choisir le plan de référence sur le plan du col du faisceau. En ce plan le paramètre confocal q est imaginaire pur et $D = A$.

Chapitre IV

Amplification optique par émission stimulée

Dans ce chapitre, nous montrerons comment il est possible d'amplifier optiquement de manière cohérente, c'est à dire sans perdre l'information de phase de l'onde lumineuse initiale. Il est nécessaire de comprendre comment la lumière interagit avec la matière. Nous aborderons par ordre de complexification croissante trois modèles faisant appel respectivement au modèle de l'électron élastiquement lié, puis aux coefficients de Einstein, puis nous ferons une introduction à la théorie semi-classique.

IV.1 Les modèles

Dans tout cette partie, nous considérerons un champ incident s'exprimant sous la forme $\vec{E} = A\cos(kz - \omega t)\vec{e}$ et se propageant dans un milieu de volume V et de longueur L contenant N atomes. Dans cette partie, la dépendance en z du champ ne jouera pas de rôle. Pour alléger les expressions, nous n'en tiendrons pas compte.

IV.1.1 Le modèle de Lorentz

a Dipôle induit

Le modèle de Lorentz s'appuie sur le modèle de l'électron élastiquement lié. Nous considérons ici un seul atome. L'équation du mouvement \vec{r} de l'électron de masse m , de charge $-e$ peut s'écrire sous la forme

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} - 2m\gamma_d\frac{d\vec{r}}{dt} - eA\cos(kz - \omega t)\vec{e} \quad (\text{IV.1})$$

Le premier terme est le terme classique de l'oscillateur élastiquement lié de fréquence propre ω_0 , proche de la fréquence ω de l'onde incidente. Le deuxième terme traduit l'amortissement γ_d . Ce terme assimilable à un frottement est responsable de l'amortissement de l'amplitude de vibration en $e^{-\gamma_d t}$ en régime libre. Le troisième terme est le terme forcé correspondant à la réponse de l'électron soumis à la force due au champ électrique \vec{E} .

Nous résolvons cette équation sous forme complexe, en introduisant \tilde{r} et \tilde{E} de la façon suivante :

$$\vec{r} = \text{Re}(\tilde{r} \vec{e} e^{-i\omega t}) \quad (\text{IV.2})$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\tilde{E} \vec{e} e^{-i\omega t}) \quad (\text{IV.3})$$

On peut remarquer que $A = \tilde{E}$.

On peut définir le dipôle de l'atome p par $\tilde{p} = -e\tilde{r}$. \tilde{r} correspond au déplacement de l'électron par rapport au noyau. Le dipôle obéit alors à l'équation

$$m\left[\frac{d^2}{dt^2}\tilde{p} - 2i\omega\frac{d}{dt}\tilde{p} - \omega^2\tilde{p}\right] = -m\omega_0^2\tilde{p} - 2m\gamma_d[-i\omega\tilde{p} + \frac{d}{dt}\tilde{p}] + e^2\tilde{E} \quad (\text{IV.4})$$

On suppose que l'enveloppe \tilde{p} évolue avec une constante de temps longue devant la période $\frac{2\pi}{\omega_0}$ du champ appliqué (approximation de l'enveloppe lentement variable). On montre alors que

$$2m(-i\omega + \gamma_d)\frac{d}{dt}\tilde{p} = [m(\omega^2 - \omega_0^2) + 2im\gamma_d\omega]\tilde{p} + e^2\tilde{E} \quad (\text{IV.5})$$

Quand $\gamma_d \ll \omega$ on peut écrire l'évolution libre du dipôle sous la forme

$$\frac{d}{dt}\tilde{p} = i\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} + i\gamma_d\right)\tilde{p} + i\frac{e^2\tilde{E}}{2m\omega} \quad (\text{IV.6})$$

En pratique l'approximation $\gamma_d \ll \omega$ est toujours vérifiée. L'amortissement γ_d , même s'il n'apparaît pas dans le terme de gauche de l'équation (??), permet dans un calcul exact d'amortir la solution libre et de ne conserver que le terme stationnaire ci-dessous.

Une fois la solution libre amortie, par les frottements, le dipôle en régime forcé, dans l'état stationnaire, peut s'exprimer sous la forme suivante

$$\tilde{p} = \frac{e^2\tilde{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - 2im\gamma_d\omega} \quad (\text{IV.7})$$

Cette relation peut aussi s'écrire de la façon suivante

$$\tilde{p} = \frac{e^2\tilde{E}}{2m\omega\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} - i\gamma_d\right)} \quad (\text{IV.8})$$

Proche de résonance, $\omega \approx \omega_0$ et

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} = (\omega_0 - \omega)\frac{\omega + \omega_0}{2\omega} \approx \omega_0 - \omega \quad (\text{IV.9})$$

Par conséquent à l'ordre le plus bas, quand $\omega \approx \omega_0$, l'équation d'évolution du dipôle de Lorentz se simplifie sous la forme

$$\tilde{p} = \frac{e^2\tilde{E}}{2m\omega_0((\omega_0 - \omega) - i\gamma_d)} \quad (\text{IV.10})$$

L'atome est caractérisé par son dipôle $\tilde{p} = -e\tilde{r}$ relié par définition à la polarisabilité α_0 de l'atome. Cette polarisabilité qui traduit "l'élasticité" de l'atome possède une partie imaginaire $i\alpha''$ et une partie réelle α' et est reliée au dipôle \tilde{p} par

$$\tilde{p} = \varepsilon_0 \alpha_0 \tilde{E} \quad (\text{IV.11})$$

On peut alors en déduire la polarisabilité et en particulier ses composantes réelle et imaginaire

$$\alpha' = \frac{e^2(\omega_0 - \omega)}{2m\omega_0\varepsilon_0((\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2)} \quad (\text{IV.12})$$

$$\alpha'' = \frac{e^2\gamma_d}{2m\omega_0\varepsilon_0((\omega_0 - \omega)^2 + \gamma_d^2)} \quad (\text{IV.13})$$

b Aspect énergétique

La puissance gagnée par une particule animée d'une vitesse \vec{v} par l'intermédiaire d'une force \vec{F} , est égale à $\vec{F} \bullet \vec{v}$. Appelons P_{chat} la puissance moyenne (dans le temps) transférée du champ à l'atome. Si $P_{chat} > 0$, le transfert d'énergie va du champ vers l'atome. Cette puissance s'exprime donc sous la forme

$$P_{chat} = \left\langle \vec{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right\rangle \quad (\text{IV.14})$$

en passant en notation complexe

$$\vec{p} = \text{Re}(\tilde{p}e^{-i\omega t})\vec{e} = \text{Re}[\varepsilon_0(\alpha' + i\alpha'')Ae^{-i\omega t}\vec{e}] \quad (\text{IV.15})$$

On en déduit donc que

$$\vec{p} = \varepsilon_0 A(\alpha' \cos \omega t + \alpha'' \sin \omega t)\vec{e} \quad (\text{IV.16})$$

On peut alors dériver cette quantité

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \varepsilon_0 A\omega(-\alpha' \sin \omega t + \alpha'' \cos \omega t)\vec{e} \quad (\text{IV.17})$$

Nous en déduisons donc la puissance transférée de l'atome au champ

$$P_{chat} = \varepsilon_0 A^2 \omega \alpha'' \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A^2 \omega \alpha'' \quad (\text{IV.18})$$

Les transferts d'énergie se font donc via la partie imaginaire de la polarisabilité. Le terme α' traduit la dispersion. γ_d est dû aux collisions et processus non radiatifs de la relaxation. C'est ce terme qui permet les transferts d'énergie. γ_d étant positif, nous voyons ici que P_{chat} est positif. Le transfert d'énergie se fait donc du champ vers les atomes.

En conclusion, le modèle de Lorentz traduit l'absorption du champ par les atomes mais ne peut pas rendre compte de l'amplification (énergie amenée par les atomes au champ). Aucun gain optique n'est donc possible.

Ce modèle n'est donc pas suffisant mais c'est un bon modèle en ce qui concerne l'absorption, l'indice et la diffusion.

IV.1.2 Le modèle de Einstein

a Processus de transfert d'énergie

Le modèle de Einstein est un modèle phénoménologique qui fait intervenir les niveaux d'énergie de l'atome et le rayonnement thermique. Nous considérons un atome à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, dont la fréquence de Bohr ω_0 vérifie

$$\omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar} \quad (\text{IV.19})$$

On appelle N_a et N_b les populations des niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$. Les populations vérifient la relation $N_a + N_b = N$, si le système est fermé.

$n_a = \frac{N_a}{N}$ et $n_b = \frac{N_b}{N}$ sont les probabilités d'occupation des deux niveaux.

On considère un champ thermique, incohérent, et donc uniquement caractérisé par sa densité spectrale d'énergie $u(\nu)$.

$$u(\nu) = \frac{dU}{d\nu} \quad (\text{IV.20})$$

U est l'énergie du rayonnement thermique et ν la fréquence. L'énergie U vérifie

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (\text{IV.21})$$

Sous rayonnement thermique, l'équilibre est atteint quand l'atome peut gagner de l'énergie sous l'effet du rayonnement et quand le champ peut aussi gagner de l'énergie et donc en prendre à l'atome. Partant de ce raisonnement, Einstein pose les équations phénoménologiques suivantes qui vérifient ce principe d'équilibre

$$\frac{dn_b}{dt} = -\frac{dn_a}{dt} = -An_b + Bu(\nu_0)n_a - Bu(\nu_0)n_b \quad (\text{IV.22})$$

Le premier terme correspond à la désexcitation spontanée de l'atome, c'est à dire à la désexcitation qui existe même quand il n'y a pas de champ. Le terme A est aussi appelé γ_b , taux de désexcitation spontanée du niveau b . Ce terme peut comporter une partie radiative (émission d'un photon) et une partie non radiative ou collisionnelle (par exemple désexcitation par des vibrations du réseau cristallin pour un solide (phonons)). Le deuxième terme est proportionnel à n_a et traduit l'absorption du rayonnement. L'atome est excité et passe du niveau $|a\rangle$ au niveau $|b\rangle$. Le niveau supérieur se peuple donc si un champ résonant est appliqué. L'énergie du champ est absorbée et cédée à l'atome.

Le troisième terme est proportionnel à n_b et traduit l'émission stimulée (appelée aussi émission induite). Le niveau supérieur se dépeuple donc si un champ résonant est appliqué à l'atome. De l'énergie est alors cédée par les atomes au champ.

Les deux processus d'émission stimulée et d'absorption sont des processus concurrents.

Attention, les équations de Einstein décrivent des phénomènes incohérents. La phase ne peut donc être décrite par ces équations.

La puissance P_{atch} transférée de l'atome vers le champ vérifie

$$P_{atch} = -\hbar\omega_0 \frac{dn_b}{dt} = \hbar\omega_0 B(n_b - n_a)u(\nu_0) \quad (\text{IV.23})$$

Si $n_a > n_b$, $P_{atch} < 0$. L'énergie est transférée du champ vers l'atome. Il y a absorption par l'atome.

Si $n_b > n_a$, $P_{atch} > 0$. L'énergie est transférée de l'atome vers le champ quand il y a inversion de population.

b Evolution des populations dans un système à deux niveaux

On considère un système à deux niveaux dans lequel initialement, tous les atomes sont dans le niveau $|a\rangle$. A $t = 0$, $n_a = 1$ et $n_b = 0$. Nous résolvons les équations de Einstein. Le système évolue de manière monotone vers un régime stationnaire. Quand celui-ci est atteint, les équations de Einstein donnent comme populations

$$n_b(\infty) = \frac{Bu(\nu_0)}{A + 2Bu(\nu_0)} \quad (\text{IV.24})$$

$$n_a(\infty) = \frac{A + Bu(\nu_0)}{A + 2Bu(\nu_0)} \quad (\text{IV.25})$$

- Régime de faible excitation si le rayonnement est faible, $Bu(\nu_0) \ll A$ alors $n_b(\infty) = \frac{Bu(\nu_0)}{A}$. Dans ce régime la population du niveau $|b\rangle$ est proportionnelle à l'excitation lumineuse (régime linéaire)
- Régime de saturation si le rayonnement est fort, $Bu(\nu_0) \gg A$ alors $n_b(\infty) = \frac{1}{2}$. Les populations des deux niveaux s'égalisent. La transition sature.

Il n'est donc pas possible d'obtenir une inversion de population avec deux niveaux isolés. Cette saturation de la transition est due à la compétition entre l'absorption et l'émission stimulée.

En résumé dans un système à deux niveaux, $n_a \geq n_b$. Il n'est pas possible d'inverser les populations d'un système à deux niveaux en éclairant le système par un champ résonnant.

c Conclusions

Les deux modèles phénoménologiques précédents traduisent une certaine réalité. Ce sont d'excellents modèles. Le modèle de Lorentz prévoit toujours de l'absorption. C est un bon modèle pour un atome interagissant avec un champ faible. Le modèle d'Einstein prévoit bien un transfert d'énergie de l'atome vers le champ. En revanche il ne dit rien sur la cohérence.

IV.1.3 Modèle semi-classique

Le modèle de l'électron élastiquement lié fait intervenir le dipôle mais pas les populations. Le modèle de Einstein fait intervenir les populations mais pas le dipôle. Le modèle semi-classique se propose de réconcilier les deux approches. Dans ce modèle seul l'atome est quantifié, le champ est considéré comme une variable classique.

On considère que le champ est quasiment résonant avec la transition $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$ (approximation quasi-résonante, appelée aussi approximation séculaire). On peut considérer alors que nous avons un système à deux niveaux.

En représentation d'interaction, on décrit l'évolution de l'atome en termes de la matrice densité, ρ qui est une matrice 2x2 et vérifie les relations ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ba}^* \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

$\rho_{aa} = n_a$ et $\rho_{bb} = n_b$ sont les populations respectives des niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ avec $\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1$ pour un système à deux niveaux fermé. ρ_{ba} est la cohérence. Elle est directement reliée au dipôle.

L'opérateur dipolaire électrique $\widehat{D} = -e\widehat{r}$ peut s'exprimer sous la forme

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{d} \\ \vec{d} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

Les termes diagonaux sont nuls pour des raisons de symétrie (L'atome est invariant par rotation). Nous pouvons donc exprimer la valeur moyenne de l'opérateur dipolaire sous la forme

$$\langle \widehat{D} \rangle = \text{Tr}(\rho \widehat{D}) = \text{Re}(2\vec{d} \rho_{ba}) \quad (\text{IV.28})$$

$2\vec{d} \rho_{ba}$ est donc le dipôle complexe dont la partie réelle est équivalente au dipôle \vec{p} introduit dans le modèle de Lorentz. On retrouve là le fait que Lorentz s'est intéressé à la cohérence du dipôle et Einstein aux populations.

$S 2d\rho_{ba}e^{i\omega t}$ est l'enveloppe lentement variable \tilde{p} du dipôle introduit dans le modèle de Lorentz.

En l'absence de relaxation, ρ évolue de la façon suivante

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho = [\widehat{H}, \rho] \quad (\text{IV.29})$$

où \widehat{H} est le hamiltonien du système

$$\widehat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - dE \cos \omega t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

En résolvant ces équations, dans ce système à deux niveaux, on trouve en posant $\rho_{ba}e^{i\omega t} = \tilde{\rho}_{ba}$ (on néglige la partie rapide qui oscille en $e^{2i\omega t}$).

$$\frac{d}{dt} \rho_{bb} = -\frac{d}{dt} \rho_{aa} = -\Omega_R \text{Im}(\tilde{\rho}_{ba}) \quad (\text{IV.31})$$

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\rho}_{ba}) = i(\omega - \omega_0)\tilde{\rho}_{ba} + i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (\text{IV.32})$$

avec Ω_R fréquence de Rabi donnée par $\Omega_R = \frac{dE}{\hbar}$ qui caractérise la force du couplage entre le champ et l'atome.

La première équation montre que les transferts de population donc les échanges d'énergie sont proportionnels à la partie imaginaire du dipôle.

Ces deux équations traduisent les oscillations de Rabi qui correspondent aux oscillations de la population et de la partie imaginaire du dipôle en fonction du temps. Ces oscillations s'effectuent à la fréquence Ω qui vérifie

$$\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \delta^2} \quad (\text{IV.33})$$

On appelle pulsation de Rabi, la pulsation Ω_R qui vérifie

$$\Omega_R = \frac{dE}{\hbar} \quad (\text{IV.34})$$

Cette pulsation est d'autant plus grande, que l'amplitude du champ E ou du dipôle d est grande.

On montre que la population $N_b = \rho_{bb}$ vérifie

$$N_b = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} \quad (\text{IV.35})$$

De même, on montre que le dipôle obéit aux relations

$$\text{Re}\tilde{D} = d \frac{(\omega - \omega_0)\Omega_R}{\Omega_R^2 + (\omega - \omega_0)^2} (1 - \cos\Omega t) \quad (\text{IV.36})$$

$$\text{Im}\tilde{D} = d \frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\Omega t \quad (\text{IV.37})$$

On peut remarquer que $\text{Im}\tilde{D}$ et N_b oscillent à la même fréquence avec un déphasage de $\frac{\pi}{2}$. $\text{Im}\tilde{D}$ est proportionnel à la puissance transférée du champ à l'atome. On peut remarquer que $\text{Im}\tilde{D}$ change de signe toutes les demie périodes de Rabi. Le transfert d'énergie se fait alternativement de l'atome vers le champ et du champ vers l'atome.

Les oscillations de Rabi correspondent à un échange périodique d'énergie entre les atomes et le champ. L'atome oscille entre l'état $|a\rangle$ et l'état $|b\rangle$ à une fréquence qui est d'autant plus rapide que le champ ou le dipôle sont importants.

En présence de relaxation

Il faut introduire les termes γ_d qui traduisent la désexcitation du dipôle et γ_b qui traduit la désexcitation spontanée du niveau $|b\rangle$. Plus précisément, on considère que le niveau $|a\rangle$ est le niveau fondamental et donc que γ_a est nul. En milieu dilué, le seul couplage de l'atome à son environnement est celui lié au rayonnement (émission spontanée). On montre alors, dans ce cas, que $\gamma_d = \frac{\gamma_{sp}}{2} = \frac{\gamma_a + \gamma_b}{2}$. On peut écrire que $\gamma_b = \Gamma_{sp}$ où γ_b est le taux de désexcitation de $|b\rangle$ vers $|a\rangle$ et que γ_b correspond au coefficient A de Einstein.

Si le milieu est dense, on doit prendre en compte les phonons d'interaction avec le réseau. La relaxation du dipôle est beaucoup plus rapide et on a $\gamma_d \gg \Gamma_b$. La désexcitation du dipôle est beaucoup plus rapide que celle de la population.

Une autre notation consiste à écrire que

$$T_1 = \frac{1}{\gamma_b} \quad (\text{IV.38})$$

$$T_2 = \frac{1}{\gamma_d} \quad (\text{IV.39})$$

Ces deux temps T_1 , appelé temps de vie, et T_2 , appelé temps de cohérence, ont été introduit dans le premier chapitre sur la cohérence. On montre que $T_2 \leq 2T_1$. Dans le cas où l'interaction avec les phonons est grande, $T_2 \ll 2T_1$, le temps de cohérence est beaucoup plus petit que le temps de vie. On montre que le dipôle est lié à la cohérence et à la phase de l'onde, qui est facilement brouillable alors que les populations sont liées à l'amplitude du champ.

Le système atome+environnement est isolé donc hamiltonien. On montre ainsi que

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{bb} = ([\hat{H}, \rho])_{bb} - \gamma_b \rho_{bb} \quad (\text{IV.40})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{ba} = ([\hat{H}, \rho])_{ba} - \gamma_d \rho_{ba} \quad (\text{IV.41})$$

En resolvant cette équation, on montre

$$\frac{d}{dt} \rho_{bb} = -\frac{d}{dt} \rho_{aa} = -\gamma_b \rho_{bb} - \Omega_R \text{Im}(\tilde{\rho}_{ba}) \quad (\text{IV.42})$$

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\rho}_{ba}) = i(\omega - \omega_0 + i\gamma_d) \tilde{\rho}_{ba} + i \frac{\Omega_R}{2} (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \quad (\text{IV.43})$$

On peut donc écrire en termes de populations, n_a , n_b et de l'enveloppe lentement variable \tilde{D} du dipôle complexe vérifiant $\tilde{D} = 2d\tilde{\rho}_{ba}$

$$\frac{d}{dt} n_b = -\gamma_b n_b + \frac{1}{2\hbar} \text{Im}(\tilde{D}\tilde{E}^*) \quad (\text{IV.44})$$

$$\frac{d\tilde{D}}{dt} = i(\omega - \omega_0 + i\gamma_d)\tilde{D} - i \frac{d^2 \tilde{E}}{\hbar} (n_b - n_a) \quad (\text{IV.45})$$

Il s'agit des équations de Bloch optiques.

a Cas d'un système peu excité

Si l'excitation est faible, $n_b \approx 0$ et donc $n_a = 1$. Les équations de Bloch (??) ci-dessus se réduisent alors à

$$\frac{d}{dt} \tilde{D} = i(\omega - \omega_0 + i\gamma_d)\tilde{D} + if \frac{e^2}{2m\omega_0} \tilde{E} \quad (\text{IV.46})$$

avec f appelé force d'oscillateur qui vérifie

$$f = \frac{2m\omega_0 d^2}{e^2 \hbar} \quad (\text{IV.47})$$

On retrouve là le modèle de Lorentz (??) avec ($f \approx 1$) en prenant \tilde{p} comme équivalent classique de \tilde{D} .

b Régime de fort amortissement du dipôle

La solution libre s'amortit vite et on néglige $\frac{d}{dt} \tilde{D}$ devant $\gamma_d \tilde{D}$. On trouve alors que

$$\tilde{D}(t) = \frac{i}{\gamma_d - i(\omega - \omega_0)} \frac{d^2 \tilde{E}}{\hbar} (n_a(t) - n_b(t)) \quad (\text{IV.48})$$

On retrouve là l'expression de la polarisabilité avec

$$\tilde{D} = \varepsilon_0 \tilde{\alpha}_0 (n_a - n_b) \tilde{E} \quad (\text{IV.49})$$

en prenant comme expression pour la polarisabilité $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 (n_a - n_b)$

$$\tilde{\alpha} = \frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{(\omega_0 - \omega) + i\gamma_d}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_d^2} (n_a(t) - n_b(t)) \quad (\text{IV.50})$$

$\tilde{\alpha}_0$ est la polarisabilité linéaire.¹

La variable rapide, le dipôle suit donc adiabatiquement l'évolution de la variable lente, la différence de population.

A partir des équations de Bloch optiques (??), on trouve donc pour les variables lentes les populations

$$\frac{d}{dt} N_b = -\gamma_b N_b + \frac{d^2 E^2}{2\hbar^2} (N_a - N_b) \frac{\gamma_d}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_d^2} \quad (\text{IV.51})$$

A ce niveau, la phase a disparu.

Nous allons montrer que si $|a\rangle$ est le niveau fondamental on retrouve le modèle de Einstein.

On peut remarquer que si, comme dans le modèle de Einstein, on relie E^2 à la densité énergétique, on obtient

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{IV.52})$$

On retrouve alors la relation de Einstein (??) avec

$$B u(\nu) = \frac{\varepsilon_0}{2\hbar} \text{Im}(\alpha_0) U \quad (\text{IV.53})$$

Attention $u(\nu)$ est la densité spectrale d'énergie volumique valable pour un champ à spectre large alors que la quantité U qui apparaît là est l'énergie volumique, valable pour un champ monochromatique

En conclusion on peut écrire l'évolution des populations sous la forme

$$\frac{d}{dt} N_a = -\gamma_a N_a + \gamma_{ba} N_b + B' E^2 (N_b - N_a) \quad (\text{IV.54})$$

$$\frac{d}{dt} N_b = -\gamma_b N_b + B' E^2 (N_a - N_b) \quad (\text{IV.55})$$

avec $\gamma_b = \gamma_{ba} + \gamma_{b, \text{autres niveaux}}$ avec B' qui vérifie la relation ci-dessous

$$B' = \frac{d^2}{2\hbar^2} \frac{\gamma_d}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_d^2} \quad (\text{IV.56})$$

On retrouve les équations de Einstein. Les équations de Einstein sont la limite stationnaire des équations de Bloch, en présence d'amortissement.

1. Si le système est peu excité ($n_a = 1$) on retrouve le modèle de Lorentz et l'expression de la polarisabilité (??) en identifiant $\frac{d^2}{\hbar}$ à $\frac{e^2}{2m\omega_0}$ (ce qui est équivalent à dire ($f \approx 1$)).

c Section efficace

c.1 Grandeurs liées à l'énergie

- **Intensité** $I = E \cdot E^*(V/m)^2$
- **Vecteur de Poynting** $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c I (W/m^2)$
- **Puissance** : flux du vecteur de Poynting à travers la surface S. S peut être la surface du détecteur, ou la section du faisceau. Pour un faisceau gaussien TEM_{00} de rayon w , $S = \pi w^2$. Lorsque le vecteur de Poynting est constant sur la surface (onde plane), $P = \Pi S = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c I S$
- **Débit de photons (par unité de surface)**

$$\Delta\Phi = \frac{\Pi}{\hbar\omega} = \frac{\varepsilon_0 c I}{2\hbar\omega} \quad (\text{IV.57})$$

On peut donc exprimer l'intensité I sous la forme suivante

$$I = \frac{2\hbar\omega}{c\varepsilon_0} \Delta\Phi \quad (\text{IV.58})$$

c.2 Section efficace d'absorption

$$\frac{d}{dt} N_b = -\gamma_b N_b + B' I (N_a - N_b) \quad (\text{IV.59})$$

On peut utiliser la relation (??) ci dessus pour exprimer la relation (??) sous une autre forme :

$$\frac{d}{dt} N_b = -\gamma_b N_b + \sigma(\omega) (N_a - N_b) \Delta\Phi \quad (\text{IV.60})$$

On appelle $\sigma(\omega)$ la section efficace d'absorption, qui est homogène à une surface. Elle vérifie la relation

$$\sigma(\omega) = \frac{2\hbar\omega B'}{\varepsilon_0 c} \quad (\text{IV.61})$$

On peut aussi l'écrire sous la forme

$$\sigma(\omega) = \frac{d^2 \gamma_d \omega}{\hbar \varepsilon_0 c} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_d^2} = \frac{\omega}{c} \text{Im}(\alpha_0) \quad (\text{IV.62})$$

où α_0 est la susceptibilité linéaire.

Remarquons que si l'atome n'est pas excité, $N_a = N$ et l'absorption par N atomes d'un faisceau lumineux de pulsation ω s'exprime comme $N\sigma(\omega)\Delta\Phi$. En mesurant l'absorption d'une assemblée N d'atomes, on remonte à la section efficace d'absorption.

L'équation (??) ci-dessus, montre que la section efficace d'absorption est une lorentzienne, centrée en $\omega = \omega_0$.

IV.1.4 Propagation d'une onde dans un milieu atomique

La section précédente nous a permis de connaître la réponse d'un milieu en termes d'absorption et d'émission. Nous nous intéressons maintenant à une onde qui se propage

dans un milieu et aux modifications qu'elle subit.

On considère un milieu atomique constitué par N atomes dont N_a sont dans l'état $|a\rangle$ et N_b dans l'état $|b\rangle$. Ce milieu a une longueur ℓ , une section S et un volume $V = S\ell$. Nous supposons pour simplifier ce milieu isotrope, homogène et dilué. Une onde \vec{E} se propage selon la direction z dans ce milieu. En $z = 0$, \vec{E} s'exprime sous la forme $\vec{E} = A(0)e^{-i\omega t}\vec{e}$. Nous cherchons à exprimer $A(z)$.

a Rappel d'électromagnétisme

Nous appelons \vec{p} le dipôle d'un atome. La polarisation \vec{P} s'exprime comme la densité volumique de dipôles.

$$\vec{P} = \frac{N}{V}\vec{p} = \varepsilon_0\alpha\frac{N}{V}\vec{E} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \quad (\text{IV.63})$$

où $\chi = \alpha\frac{N}{V}$ est la susceptibilité diélectrique.

L'induction électrique $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ s'exprime sous la forme $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ avec $\varepsilon_r = 1 + \chi$.

L'induction magnétique \vec{B} et le champ magnétique \vec{H} sont dans un milieu non magnétique lié par $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$.

Les relations de Maxwell vérifient

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (\text{IV.64})$$

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\text{IV.65})$$

Pour une onde plane, dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, $\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{u} = i\vec{k} \wedge \vec{u}$ et $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -i\omega\vec{u}$, on peut transformer les équations (??) en $k^2 = \varepsilon\mu_0\omega^2$. On en déduit donc que

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{n}\omega}{c} \quad (\text{IV.66})$$

avec $\tilde{n}^2 = 1 + \chi$. La susceptibilité $\chi = \alpha\frac{N}{V}$ étant pour un milieu dilué ($\frac{N}{V} \ll 1$) faible devant 1, l'indice complexe \tilde{n} vérifie $\tilde{n} = 1 + \frac{\chi}{2}$.

A partir de la relation de dispersion (??), on peut écrire la variation longitudinale du champ électrique

$$\frac{\partial E}{\partial z} = ikE = i\frac{\tilde{n}\omega}{c}E \quad (\text{IV.67})$$

On en déduit donc que

$$E(z) = E(0) \cdot e^{i\frac{\tilde{n}\omega}{c}z} \quad (\text{IV.68})$$

b Indice

Dans un milieu dilué, l'indice complexe \tilde{n} peut s'écrire sous la forme $\tilde{n} = 1 + \frac{N}{2V}\tilde{\alpha}$. On peut dès lors définir l'indice réel n sous la forme

$$n = 1 + \frac{N}{2V}\text{Re}(\alpha) \quad (\text{IV.69})$$

La polarisabilité $\tilde{\alpha}$ peut s'exprimer en fonction de la polarisabilité linéaire $\tilde{\alpha}_0$ sous la forme

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0(n_a - n_b) \quad (\text{IV.70})$$

On peut alors écrire l'indice sous la forme suivante

$$n = 1 + \varepsilon_0 \frac{N_A - N_b}{2V} \text{Re}(\alpha_0) \quad (\text{IV.71})$$

L'indice dépend donc de la polarisabilité du milieu mais aussi de ses populations. Il reste néanmoins proche de 1.

On retrouve ainsi les relations classiques de Kramers-Kronig.

La relation (??) peut alors s'écrire sous la forme

$$E(z) = E(0)e^{i\frac{n\omega z}{c}} e^{-\frac{\omega z}{2c} \text{Im}\chi} \quad (\text{IV.72})$$

La relation de phase entre l'onde entrante et l'onde sortante est fixée par la longueur du milieu et la valeur de l'indice.

Nous allons maintenant nous intéresser à la variation de l'amplitude du champ en fonction de la propagation. Cette information est portée par la partie imaginaire de la susceptibilité.

c Le gain

La relation (??) peut être utilisée pour exprimer le gain en intensité et donc en puissance du faisceau

$$I(z) = I(0)e^{-\frac{\omega \ell}{c} \text{Im}(\chi)} = I(0)e^{gz} \quad (\text{IV.73})$$

Le gain (linéique en intensité) g s'exprime donc sous la forme

$$g = -\frac{N\omega}{cV} \text{Im}(\tilde{\alpha}) = -\frac{(N_a - N_b)\omega}{V \cdot c} \text{Im}(\tilde{\alpha}_0) \quad (\text{IV.74})$$

On peut donc exprimer le gain linéique en intensité sous la forme

$$g = \frac{N_b - N_a}{V} \sigma(\omega) \quad (\text{IV.75})$$

Le gain est proportionnel à la section efficace d'absorption. Le gain est donc une lorentzienne centrée en ω_0 . On peut écrire

$$g = \frac{N_b - N_a}{V} \frac{d^2\gamma_d}{\hbar\varepsilon_0 c^2} \frac{\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_d^2} \quad (\text{IV.76})$$

- Si $N_a > N_b$, $g < 0$: il y a alors absorption
- si $N_a < N_b$, $g > 0$: il y a inversion de population et amplification.

IV.2 Système à quatre niveaux

On résout les équations

$$\frac{dN_f}{dt} = \gamma_a N_a + W_p(N_e - N_f) \quad (\text{IV.77})$$

$$\frac{dN_e}{dt} = -\gamma_e N_e + W_p(N_f - N_e) \quad (\text{IV.78})$$

$$\frac{dN_b}{dt} = \gamma_e N_e - \gamma_b N_b + W(N_a - N_b) \quad (\text{IV.79})$$

$$\frac{dN_a}{dt} = \gamma_b N_b - \gamma_a N_a + W(N_b - N_a) \quad (\text{IV.80})$$

On trouve

$$D = N_b = \frac{W_p}{W + \gamma_b + W_p} N \quad (\text{IV.81})$$

$W = BI$ et $W_p = B_p I_p$

On peut tracer **pour une intensité I donnée, l'évolution de la différence de population D en fonction du pompage w_p .**

- A faible pompage, ($w_p \ll w, \gamma_b$), la différence de population est proportionnelle au taux de pompage : $D \propto W_p$
- A fort pompage, la différence de population sature et tend vers N la population totale : $D \rightarrow N$.

De même, on peut tracer **pour un pompage w_p fixe, l'évolution de la densité de population.**

- Si I est grand, $D \rightarrow 0$. Le gain devient nul

- En $I = 0$ ou pour $W \ll W_p$, $D = D_0 = \frac{W_p N}{W_p + \gamma_b}$

Au final on peut dans tous les cas de figure exprimer la différence de population D sous la forme suivante

$$D_0 = \frac{NW_p}{\gamma_b + W_p} \quad (\text{IV.82})$$

On peut donc écrire

$$D = \frac{D_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \quad (\text{IV.83})$$

où $I_{sat} = \frac{\gamma_b + W_p}{B}$ On peut donc en déduire que

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \quad (\text{IV.84})$$

avec $g_0 = \frac{\sigma(\omega)D_0}{V}$. g_0 est appelé le gain non saturé du laser.

Chapitre V

Le laser stationnaire

V.1 Principes

Dans toute cette partie, sauf mention du contraire, nous étudierons le cas d'une cavité en anneau de longueur L .

V.1.1 Rappels

Pour faire un laser, il est nécessaire d'avoir les trois ingrédients suivants : une cavité, le gain, environnement.

.1 Cavité Dans le chapitre 2, nous avons vu que les cavités de longueur L se divisent en deux types :

- les cavités linéaires, pour lesquelles la résonance est obtenue pour $kL = m\pi$. L intervalle spectral libre vaut $ISL = \frac{c}{2L}$
- Les cavité en anneau, pour lesquelles la résonance est obtenue pour $kL = 2m\pi$. L intervalle spectral libre vaut $ISL = \frac{c}{L}$

.2 Gain Dans le chapitre 4 nous avons défini g le gain linéique : $I(z) = I(0)e^{gz}$. On peut alors écrire

$$E(\ell) = E(0)e^{ikn\ell} e^{\frac{g\ell}{2}} = A_0 e^{i(k\ell - \omega t)} e^{ik(n-1)\ell} e^{\frac{g\ell}{2}} \quad (\text{V.1})$$

On peut aussi écrire

$$E(\ell) = \sqrt{G} A_0 e^{i(k\ell - \omega t)} e^{i\psi} \quad (\text{V.2})$$

On écrit là le gain G en intensité en fonction du gain linéique : $G = e^{g\ell}$. La phase ψ vérifie $\psi = k(n-1)\ell$.

On peut aussi définir un gain complexe en amplitude \tilde{g}_a qui vérifie $\tilde{g}_a = e^{\frac{g\ell}{2}} e^{ik(n-1)\ell}$

.3 Environnement L'environnement a deux rôles. Il permet d'amener de l'énergie du milieu amplificateur. Il permet également de récupérer par le faisceau laser transmis hors de la cavité, l'énergie émise par le laser.

V.1.2 Les différents éléments

.1 Boucle de rétroaction la lumière émise par les atomes est recyclée dans la cavité et la lumière émise fait des allers retours à l'intérieur de la cavité. Il peut donc y avoir une intensité intracavité maximum quand il y a des interférences constructives. Quand l'intensité intracavité est maximum, l'émission stimulée est maximum. A chaque passage dans le milieu amplificateur, le champ est amplifié.

.2 Couplage avec l'extérieur

- **Mécanisme de pompage** : convertisseur d'énergie :

— Laser Helium-Néon : décharge $r = 10^{-4}$

— Diode laser (ou laser à semi-conducteur), pompage électrique : $r = 0.5$

— Laser Nd :YAG continu, pompage optique :

- **Une voie de sortie.** Elle est obtenu par la transmission du miroir de sortie. Pour un bon laser cette transmission représente l'essentiel des pertes de cavité
- **Pertes de cavités** (autres que la transmission du miroir de sortie). Il s'agit de pertes parasites, par les fenêtres du milieu à gain, par la transmission très faible mais non nulle des miroirs (autres que le miroir de sortie), par des pertes par diffraction sur des optiques... Ces pertes parasites, qui ont pour unique conséquence de faire baisser la puissance utile du laser.

V.1.3 Fonctionnement

Du point vue du milieu amplificateur, on peut distinguer deux ingrédients essentiels

- le gain par rapport aux pertes. En un tour de cavité on doit plus gagner par le gain, qu'on ne perd par les pertes.
- la saturation du gain.

Le laser démarre sur du bruit. A chaque tour, le gain doit être plus important que les pertes. Les interférences entre les ondes oscillant dans la cavité doivent être constructives. La cavité détermine ainsi un certain nombre de modes du laser, pour lesquels le gain est plus important que les pertes. En conclusion la cavité détermine au sein de la zone de gain un peigne de fréquence correspondant à des modes qui lasent. Ces modes vérifient la condition suivante

$$kL = 2m\pi \quad (\text{V.3})$$

Par conséquent les modes du laser ont pour fréquence $\nu = \frac{mc}{L}$. Les fréquences du laser sont distantes de l'intervalle Spectral Libre ($ISL = \frac{c}{L}$ pour une cavité en anneau).

V.2 Equations de bouclage

Nous considérons ici une cavité en anneau de longueur L , comportant 3 miroirs plans de réflectivité maximum et un miroir plan de couplage de coefficient de réflexion et transmission en amplitude (r et t) et en intensité (R et T). Dans cette cavité, on place un milieu atomique de longueur ℓ . On considère que dans la cavité et le milieu, il existe des pertes pour le champ autres que celles dues au miroir de couplage. Ces pertes peuvent être dues à la diffusion sur des miroirs de rugosité non nulle, des réflexions parasites sur des interfaces (par exemple celle entre le vide et le milieu...). Ces pertes sont supposées être de A en intensité. Nous appelons G le gain en intensité. On appelle $E(0)$ le champ juste avant le milieu amplificateur, $E(\ell)$ le champ juste après l'amplificateur, et $E(L)$ le champ après un tour. On peut donc écrire

$$E(\ell) = e^{ik\ell n} \sqrt{G} E(0) \quad (\text{V.4})$$

et

$$E(L) = r\sqrt{1-A} e^{ik(L-\ell)} = \sqrt{RG(1-A)} e^{ik(L+(n-1)\ell)} E(0) \quad (\text{V.5})$$

Le gain en intensité G s'exprime en fonction du gain linéique g par la relation

$$G = e^{g\ell} \quad (\text{V.6})$$

L'équation de bouclage $E(L) = E(0)$ conduit à la relation suivante

$$RG(1-A)e^{ikL+(n-1)\ell} = 1 \quad (\text{V.7})$$

On peut en déduire une relation sur l'amplitude et la phase

$$L + \ell(n-1) = p\lambda \quad (\text{V.8})$$

$$RG(1-A) = 1 \quad (\text{V.9})$$

La relation sur le gain (??) fixe la valeur du gain et donc de l'intensité en fonction des paramètres de la cavité.

On peut aussi écrire le coefficient de réflexion sous la forme $R = 1 - T$. Quand les miroir sont très réfléchissants et donc que $T \ll 1$ et que les pertes autres sont très faibles ($A \ll 1$) on peut donc écrire que $(1-A)R = (1-A)(1-T) = 1 - A - T$

L'équation de bouclage se simplifie donc en

$$e^{g\ell}(1 - T - A) = 1 \quad (\text{V.10})$$

On peut donc en déduire que

$$g = \frac{1}{\ell} \ln(1 - T - A) = \frac{T + A}{\ell} \quad (\text{V.11})$$

On dit usuellement que le gain linéique en intensité est égal aux pertes par unité de longueur.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour un système à quatre niveaux

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \quad (\text{V.12})$$

où

$$I_{sat} = \frac{\gamma_b + W_p}{B} \quad (\text{V.13})$$

$$D_0 = \frac{NW_p}{\gamma_b + W_p} \quad (\text{V.14})$$

$$g_0 = \frac{\sigma(\omega)D_0}{V} \quad (\text{V.15})$$

V.2.1 Seuil d'oscillation

Au seuil d'oscillation, $I = 0$ et $g(W_p^{seuil}) = g_0(W_p^{seuil})$. La condition que le gain linéique soit égal aux pertes par unité de longueur amène à la condition en notant $g_0^{seuil} = g_0(W_p^{seuil})$

$$g_0^{seuil} = \frac{T + A}{\ell} \quad (\text{V.16})$$

en utilisant les relations (??) (et (??)), on trouve la relation donnant le taux de pompage au seuil W_p^{seuil}

$$W_p^{seuil} = B_p I_p^{seuil} = \frac{\gamma_b}{N \frac{\sigma \ell}{(T+A)V} - 1} \quad (\text{V.17})$$

V.2.2 Emission au-dessus du seuil

.1 Saturation du gain Dans le régime transitoire, quand l'oscillation laser s'établit dans la cavité, l'intensité intracavité I augmente. Le gain diminue et sature. Au point de fonctionnement, le gain saturé atteint la valeur $g = \frac{T+A}{\ell}$. Cette valeur du gain saturé g est fixée par les pertes dans la cavité. Cette valeur de g détermine la valeur de l'intensité intracavité I .

Attention il faut bien faire la différence entre g_0 et g_0^{seuil} . Le gain non saturé dépend du taux de pompage et on peut écrire

$$g_0 = \frac{\sigma(\omega)N}{V} \frac{W_p}{W_p + \gamma_b} \quad (\text{V.18})$$

. Au seuil le gain non saturé prend alors la valeur particulière

$$g_0^{seuil} = \frac{T + A}{\ell} \quad (\text{V.19})$$

.2 Intensité du laser au dessus du seuil D'après la relation (??), quand le laser fonctionne, la relation $g = \frac{T+A}{\ell}$ est vérifiée. De plus le gain vérifie la relation suivante

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}} \quad (\text{V.20})$$

Au-dessus du seuil, l'intensité I est non nulle. On peut donc exprimer l'intensité I sous la forme

$$I = I_{sat} \left(\frac{g_0}{g} - 1 \right) = I_{sat} \left(\frac{g_0 \ell}{T + A} - 1 \right) \quad (\text{V.21})$$

On peut remarquer que au dessus du seuil d'oscillation et pour $W_p \ll \gamma_p$, l'intensité du laser augmente linéairement avec le taux de pompage.

V.2.3 Puissance et rendement

Pour une cavité linéaire, on peut écrire la puissance du laser sous la forme

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} c S I_{out} \quad (\text{V.22})$$

On peut exprimer I_{out} sous la forme $I_{out} = T I_+$ où I_+ est l'intensité de l'onde se propageant dans le sens des z croissants dans la cavité. On peut écrire également $I = I_+ + I_-$. Le rendement différentiel est le rendement du laser sans prendre en compte l'énergie qui est nécessaire pour l'amener au seuil d'oscillation.

$$r_{dif} = \frac{P_{laser}}{P_{pompe} - P_{pompe}^{seuil}}. \quad (\text{V.23})$$

le rendement différentiel, correspond à la pente de la courbe donnant la puissance en fonction du pompage. Le rendement total que l'on peut exprimer sous la forme (??) ci-dessous, prend en compte l'énergie nécessaire pour arriver au seuil.

$$r_{total} = \frac{P_{laser}}{P_{pompe}} \quad (\text{V.24})$$

V.3 Largeur de raie

Dans un laser, la phase n'est pas fixée de manière absolue. Elle diffuse. L'émission spontanée (ou l'interaction avec l'environnement) est à l'origine de cette diffusion spectrale qui élargit le spectre. L'émission spontanée amène une petite contribution en intensité et en phase au champ. la fluctuation d'intensité est rapidement corrigée par la fluctuation du gain, mais la fluctuation de phase reste et contribue au phénomène de diffusion de phase. la phase d'un laser diffuse de manière aléatoire sur une largeur qui de l'ordre de grandeur du temps de corrélation de la phase (ie le temps après lequel l'information initiale de la phase est perdue). On montre que la largeur ultime d'un laser $\Delta\omega_{ST}$, appelée aussi largeur Schalow-Townes est de l'ordre , bien au dessus du seuil, de la largeur $\Delta\omega_{cav}$ d'un mode de cavité (en l'absence de processus de gain) divisé par le nombre n de photons dans la cavité. Plus précisément, on montre que

$$\Delta\omega_{ST} \approx \frac{N_b}{2(N_b - N_a)} \frac{\Delta\omega_{cav}}{n} \quad (\text{V.25})$$

Pour un laser hélium-néon, on obtient $\frac{\Delta\omega_{ST}}{2\pi} \approx 10^{-3} Hz$, alors que pour un laser à semi-conducteur $\frac{\Delta\omega_{ST}}{2\pi} \approx 1 MHz$. En pratique, les fluctuations techniques expérimentales, font que les largeurs des lasers sont souvent un ordre de grandeur plus importantes, que la la largeur Shalow-Townes. On utilise en métrologie quantique des techniques d'asservissement sur des références, pour stabiliser les lasers et approcher la largeur ultime.

V.4 laser multimode/monomode longitudinal

Que se passe-t-il quand plusieurs modes sont excités ?

V.4.1 Laser à élargissement homogène

Qualitativement, la saturation du gain se produit sur toute la courbe de gain. Nous avons montré dans le chapitre 4, que le gain était une lorentzienne de largeur γ_d . Quand nous avons étudié l'atome, nous avons parlé du temps $T_2 = \frac{1}{\gamma_d}$ qui traduit la variation de la phase et la perte de cohérence. La largeur spectrale de la courbe de gain est notée $\gamma_2 = \gamma_d = \frac{1}{T_2}$. Au sein de cette largeur, plusieurs modes résonants de la cavité peuvent être en compétition mais seul le mode de plus fort gain non saturé subsiste.

V.4.2 laser à élargissement inhomogène

(dans le cas où $ISL < \gamma_2$) Ce sont des atomes différents (pas de même vitesse par exemple pour un gaz chaud) qui interagissent avec des différents modes de cavité. Ils ont tous une fréquence de résonance $\omega_0 + kv$ où v est leur vitesse. Les modes s'ignorent et coexistent. Plusieurs modes peuvent donc laser en même temps et le laser est multimode.

-cas du laser Helium-Néon) Dans ces conditions la courbe de gain a pour largeur la dispersion en vitesse. Pour un gaz, l'élargissement inhomogène est du à l'élargissement doppler. Pour un solide, il s'agit de déplacement stark.

V.4.3 comment rendre monomode un faisceau multimode ?

Il est très facile de rendre un laser monomode transverse. Il suffit de mettre un filtre spatial dans la cavité. Il est par contre beaucoup plus difficile de rendre un laser monomode longitudinal. Il existe plusieurs méthodes pour diminuer le nombre de modes longitudinaux et à la limite pour le rendre monomode longitudinal. Les plus courantes sont les suivantes -laser court (ISL grand si bien que le nombre de modes est faible dans la largeur du gain). C est le cas des lasers à semi conducteurs.

-laser peu intense : il existe un seul mode pour lequel le gain non saturé est supérieur aux pertes linéiques. On peut par exemple, augmenter artificiellement les pertes. Cependant cette méthode a un intérêt pratique assez faible car la puissance du laser chute en conséquence.

-Pertes sélectives en fréquences. Cette méthode courante consiste à mettre dans la cavité des pertes sélectives en fréquence. On fait en sorte d'un mode ait des pertes faibles, tandis que les autres modes ont des pertes importantes, idéalement plus grandes que le gain linéique.

On peut alors utiliser un filtre de Lyot (utilisé dans les lasers Ti-Sa monomode accordables. Il existe un grand nombre de filtres de Lyot. Un exemple est le suivant : on prend 5 polariseurs tous parallèles et 4 lames de quartz dont les axes sont orientés tous parallèlement et qui forme un angle de 45° avec les directions des polariseurs. Les lames ont comme épaisseur respectives $e, 2e, 3e, 4e$ (AN $e = 2mm, n_o = 1.553, n_e = 1.544$). Chaque étage fournit un spectre cannelé. L'épaisseur de chaque étage est double du précédent de telle sorte qu'une cannelure sur deux s'éteint. En pratique

pour éviter les pertes ont fait en sorte que les lames soient inclinées par rapport à l'axe de la cavité avec un angle de Brewster. Pour accorder en longueur d'onde, il existe pas mal de techniques : On peut par exemple, tourner chaque étage d'un angle $n\alpha$ ou bien associer à chacune des lames cristallines qui constituent le filtre de Lyot une lame quart d'onde orientée à 45° des lames originales du filtre suivie d'une lame demi-onde qui elle, peut être orientée à volonté d'un angle α par rotation autour de son axe optique.

Pour filtrer la fréquence, on peut aussi utiliser un réseau en remplaçant un des miroir. Celui induit pas mal de pertes, et en pratique est surtout beaucoup utilisé pour les lasers à semi-conducteurs.

Une méthode très différente consiste à injecte un laser monomode longitudinal dans un laser multimode (maître/esclave). le laser maître est peu puissant mais monomode longitudinal et très stable. le laser esclave est lui puissant mais multimode. On bloque par des techniques d'asservissement la cavité du laser esclave sur une longueur proche de la fréquence d'oscillation du laser maître. Celui-ci une fois injecté dans la cavité de l'esclave, sera amplifié par le milieu à gain du laser esclave. On obtient ainsi un laser qui a la stabilité et monochromaticité du laser maître avec une puissance bien plus importante. Cette technique impose aussi un sens d'oscillation au laser esclave injecté lorsque la cavité est en anneau.

On peut aussi imposer un sens d'oscillation dans une cavité linéaire avec une diode optique (milieu faraday qui fait tourner la polarisation d'un même angle dans les deux sens de propagation et polariseur.

On peut aussi avoir un laser polarisé en imposant des pertes sur la polarisation (exemple fenêtre à Brewster dans un laser He-Ne).

Chapitre VI

Le laser dynamique

VI.1 Les equations couplées

VI.1.1 Equation d'évolution du champ dans une cavité Fabry-Pérot vide

On considère une cavité en anneau de longueur L . on s'intéresse à la valeur $E(t, Z)$ du champ au point d'abscisse z a l'instant t . On cherche à connaître la valeur du champ après un tour de cavité. Le temps pour faire un tour de cavité, T_{cav} vérifie $T_{cav} = \frac{L}{c}$. Tous les miroirs de la cavité sont des miroirs parfaits $R_{max}(R = 1)$ sauf le miroir de couplage dont le coefficient de réflexion en intensité est R et en transmission T ($R + T = 1$). On appelle A les autres pertes de la cavité (absorption, miroirs presque parfaits, ...). // Après un tour le champ au point d'abscisse z vérifie

$$E(t + T_{cav}, z) = \sqrt{R(1 - A)} e^{ikL} E(t, z) \quad (VI.1)$$

à résonance $e^{ikL} = 1$. Le développement de Taylor au premier ordre donne

$$E(t) + T_{cav} \frac{\partial E}{\partial t} = \sqrt{(1 - T)(1 - A)} E(t) \quad (VI.2)$$

soit

$$T_{cav} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{T + A}{2} E(t) \quad (VI.3)$$

Intéressons nous à l'évolution de l'intensité $I = EE^*$.

$$\frac{dI}{dt} = E \frac{dE^*}{dt} + E^* \frac{dE}{dt} = -(A + T) \frac{c}{L} EE^* = -\frac{(A + T)c}{L} I \quad (VI.4)$$

On appelle τ_{cav} le temps de stockage dans la cavité et le taux d'amortissement dans la cavité γ_{cav} .

$$\tau_{cav} = \frac{L}{c(A + T)} = \frac{1}{2\pi} \frac{F}{ISL} \quad (VI.5)$$

$$\gamma_{cav} = \frac{1}{\tau_{cav}} \quad (VI.6)$$

où F est la finesse de la cavité et ISL est l'intervalle spectral libre. l'intensité évolue s'amortit suivant la loi

$$I(t) = e^{-\gamma_{cav} t} \quad (VI.7)$$

Pour une cavité $L = 30\text{cm}$ avec des pertes dans la cavité $T + A = 1\%$, on obtient un temps d'un tour dans la cavité $T_{cav} = 1\text{ns}$ et un temps de stockage dans la cavité $\tau_{cav} = 100\text{ns}$. On appelle n le nombre de photons dans la cavité et N le nombre d'atomes du milieu à gain susceptible de permettre un processus de pompage optique. la puissance optique est donnée par $P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c I S$ où S est la section du mode optique.

$$S = \pi W_0^2 \quad (\text{VI.8})$$

$$n = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{\varepsilon_0 c I S}{2\hbar\omega} \quad (\text{VI.9})$$

d'où

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma_{cav} n \quad (\text{VI.10})$$

VI.1.2 Equation d'évolution des populations

$$\frac{dN_f}{dt} = \gamma_a N_a + W_p(N_e - N_f) \quad (\text{VI.11})$$

$$\frac{dN_e}{dt} = -\gamma_e N_e + W_p(N_f - N_e) \quad (\text{VI.12})$$

$$\frac{dN_b}{dt} = \gamma_e N_e - \gamma_b N_b + W(N_a - N_b) \quad (\text{VI.13})$$

$$\frac{dN_a}{dt} = \gamma_b N_b - \gamma_a N_a + W(N_b - N_a) \quad (\text{VI.14})$$

On suppose que N_e et N_f varient peu et que $N_e \approx 0$ et que $N_f \approx N$. On en déduit que $\frac{dN_f}{dt} = \frac{dN_e}{dt} = 0$ et donc que

$$\gamma_e N_e = \gamma_a N_a = W_p N_f \quad (\text{VI.15})$$

et donc

$$\frac{d(N_b - N_a)}{dt} = \gamma_e N_e + \gamma_a N_a - 2\gamma_b N_b + 2W(N_a - N_b) \quad (\text{VI.16})$$

En posant $D = N_b - N_a$

$$\frac{dD}{dt} = 2W_p N - 2\gamma_b D - 2WD \quad (\text{VI.17})$$

On écrit aussi

$$\frac{dD}{dt} = -\gamma D - \kappa n D + 2W_p N \quad (\text{VI.18})$$

en posant $\gamma = 2\gamma_b$ et

$$\kappa = \frac{2B'I}{n} = B' \frac{4\hbar\omega}{\varepsilon_0 S c} \quad (\text{VI.19})$$

On peut alors écrire

$$\frac{dD}{dt} = -\gamma D - \kappa n D + R_p \quad (\text{VI.20})$$

avec le taux de pompage R_p qui vérifie $R_p = 2W_p N$. On obtient ainsi l'équation qui régit l'évolution de la différence de population.

VI.1.3 Equation sur les photons

Le nombre de photons n est régit par l'équation suivante

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma_{cav}n + \kappa nD \quad (\text{VI.21})$$

Chaque fois que la différence de population D diminue d'une unité par émission stimulée, le nombre de photons n augmente d'une unité.

VI.1.4 Solutions stationnaires

Les solutions stationnaires doivent vérifier

$$\frac{dn}{dt} = 0 \quad (\text{VI.22})$$

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad (\text{VI.23})$$

.1 Différence de population

$$\frac{dD}{dt} = 0 \Rightarrow D_{stat} = \frac{R_p}{\gamma + \kappa n} = D_0 \frac{1}{1 + n/n_{sat}} \quad (\text{VI.24})$$

avec

$$D_0 = \frac{R_p}{\gamma} \quad (\text{VI.25})$$

et

$$n_{sat} = \frac{\gamma}{\kappa} \quad (\text{VI.26})$$

$$\frac{dn}{dt} = 0 \Rightarrow n_{stat}(\kappa D - \gamma_{cav}) = 0 \quad (\text{VI.27})$$

Cette équation a deux solutions : Soit la valeur stationnaire n_{stat} du nombre de photons dans la cavité est nulle, soit elle est non nulle et c'est alors le deuxième terme de l'équation qui s'annule. Ces deux solutions correspondent aux solutions stables en-dessous et au-dessus du seuil.

- Dans le premier cas, d'après ??, on obtient les solutions suivantes pour les valeurs stationnaires du nombre de photons dans la cavité et de la différence de population.

$$n = 0 \quad (\text{VI.28})$$

$$D = \frac{R_p}{\gamma} \quad (\text{VI.29})$$

Dans ce cas, le nombre de photons dans la cavité est nul et la différence de population augmente linéairement jusqu'à atteindre la valeur de saturation $D_{sat} = \frac{\gamma_{cav}}{\kappa}$. Il n'est pas possible de dépasser cette valeur stationnaire.

- L'autre couple de solutions de l'état stationnaire est donné par

$$n_{stat} \neq 0 \rightarrow D = \frac{\gamma_{cav}}{\kappa} \quad (\text{VI.30})$$

d'après ???. On retrouve là le fait que l'inversion de population dans l'état stationnaire est fixée par le niveau de pertes. Par ailleurs l'inversion de population est fixée par le taux de pompage R_p ($\frac{R_p}{\gamma}$). En égalisant ??? et ???, on obtient l'équation

$$\frac{\gamma_{cav}}{\kappa} = \frac{R_p}{\gamma(1 + \frac{n}{n_{sat}})} \quad (\text{VI.31})$$

La résolution de cette équation donne le nombre de photons intracavité dans l'état stationnaire.

$$n = n_{sat} \left(\frac{R_p \kappa}{\gamma \gamma_{cav}} - 1 \right) \quad (\text{VI.32})$$

soit

$$n = \frac{R_p}{\gamma_{cav}} - \frac{\kappa}{\gamma} \quad (\text{VI.33})$$

Dans cette dernière équation, le premier terme correspond à l'émission stimulée de photons et le deuxième aux pertes. On retrouve le fait que dans l'état stationnaire, les pertes compensent l'émission stimulée. Au dessus du seuil, le nombre de photons augmente linéairement avec le taux de pompage R_p alors que l'inversion de population est ne varie plus. Sous le seuil, le nombre de photons est nul et l'inversion de population augmente linéairement avec le taux de pompage.

VI.2 Oscillations de relaxation

A l'allumage d'un laser de classe B (on ne considère que l'inversion de population et le nombre de photons dans la cavité pour décrire la dynamique du laser), on observe une émission périodique. L'amplitude des oscillations observées décroît jusqu'à ce que le laser atteigne son état stationnaire. Ces oscillations peuvent aussi s'observer qu'on éteint un laser. Typiquement l'état stationnaire (allumé ou éteint) est atteint en quelques dizaines de ms.

Le schéma ci-dessous donne l'évolution de l'inversion de population et du nombre de photons dans la cavité en fonction du temps lorsque le laser est allumé. L'instant $t=0$ correspond au moment où le pompage est mis en route. On choisit une valeur de pompage $R_p > R_p^{seuil}$. On suppose aussi que $\gamma \ll \gamma_{cav}$. Les pertes de la cavité sont plus importantes que l'émission spontanée. On peut aussi dire que la dynamique de la cavité est plus rapide que la dynamique du milieu à gain.

Typiquement pour un laser Nd :YAG $\tau = \frac{1}{\gamma} = 230\mu s$ et $\tau_{cav} = 100ns$

Pour $t \leq 0$, $R_p = 0, D = 0, n = 1$. ($n=1$ correspond au bruit (1 photon d'émission spontanée)). Pour $0 \leq t \leq t_1$

$$n \approx 0 \quad (\text{VI.34})$$

$$\frac{dD}{dt} = -\gamma D + R_p \approx R_p \quad (\text{VI.35})$$

L'inversion de population croit linéairement avec le taux de pompage, mais reste inférieure au taux de pompage seuil R_p^{seuil} . Le nombre de photons dans la cavité reste donc nul.

Pour $t = t_1$, $D = D_{stat}$, $n \approx 0$. L'inversion de population atteint alors sa valeur stationnaire. Le gain est exactement compensé par les pertes. Le laser se situe exactement au seuil d'oscillation.

Pour $t_1 \leq t \leq t_2$, on a alors $\frac{dn}{dt} = -\gamma_{cav}n + \kappa nD$. Nous pouvons donc en déduire que $D > D_{stat}$ et $n < n_{stat}$. Le gain est supérieur aux pertes. Plus formellement on peut remarquer que $D > \frac{\gamma_{cav}}{\kappa} \Rightarrow \kappa D > \gamma_{cav} \Rightarrow \frac{dn}{dt} > 0$.

Pour $t = t_2$, $D > D_{stat}$, $n = n_{stat} = \frac{Rp}{\gamma_{cav}} - \frac{\gamma}{\kappa}$. On en déduit donc $\frac{dD}{dt} = R_p(1 - \frac{\kappa D}{\gamma_{cav}})$. Or $D > D_{stat} = \frac{\gamma_{cav}}{\kappa}$. Donc $\frac{dD}{dt} < 0$. L'inversion de population décroît.

Pour $t_2 \leq t \leq t_3$, on a les relations suivantes : $\frac{dD}{dt} < 0$, $n > n_{stat}$ et $D > D_{stat}$. Par conséquent $\frac{dn}{dt} = n(-\gamma_{cav} + \kappa D) > 0$. La différence de population diminue et le nombre de photons intracavité augmente.

Pour $t = t_3$, $D = D_{stat} = \frac{\gamma_{cav}}{\kappa}$ et $n > n_{stat}$

Pour $t_3 \leq t \leq t_4$, on $n > n_{stat}$ et $D < D_{stat}$, on donc $\frac{dD}{dt} < 0$ et $\frac{dn}{dt} < 0$. L'inversion de population et le nombre de photons diminuent.

Pour $t_4 \leq t \leq t_5$, $n < n_{stat}$ et donc l'inversion de population D augmente.

le processus recommence avec un amplitude moindre, jusqu'au moment où l'état stationnaire est atteint. En conclusion la solution exacte est difficile à calculer. On montre qu'au premier ordre

$$\omega = \sqrt{\frac{r-1}{\tau_{cav}\tau_b}} \quad (\text{VI.36})$$

avec $r = \frac{R_p}{R_p^{seuil}}$

VI.3 laser déclenché

Le laser à impulsions déclenchées est aussi appelé "Qswitch". Le principe est d'empêcher le laser de laser pendant un certain temps afin de maximiser l'inversion de population. Au moment où l'inversion de population sature, on diminue subitement les pertes dans la cavité. Le gain est alors très supérieur aux pertes. Une impulsion géante, de durée très courte est émise. Cette durée est gouvernée par le temps de décroissance dans la cavité ($\tau_{cav} = \frac{L}{c}$)

VI.3.1 Les méthodes pour commuter le gain

Plusieurs méthodes ont été utilisées

- **Miroir tournant.** Les premiers lasers "Qswitch" utilisaient des éléments mécaniques comme un miroir tournant. Tant que le miroir n'était pas dans la bonne

position, la cavité n'était pas alignée et les pertes étaient maximum. Cependant ce système était trop lent, peu fiable et occasionnait des vibrations mécaniques. Il a été abandonné au profit d'autres systèmes, détaillés plus bas.

- **Modulateur électro-optique.** On place dans une cavité linéaire, un modulateur électro-optique, et un cube polariseur tourné de 45° par rapport aux axes propres de l'électro-optique. Quand on applique une tension V_0 sur l'électro-optique, il se comporte comme une lame $\frac{\lambda}{4}$ sur un passage et donc comme une lame $\frac{\lambda}{2}$ sur un aller-retour dans la cavité. Quand le modulateur est sous tension V_0 , la cavité est ouverte et les pertes sont maximum (par le polariseur). Lorsque le modulateur n'est pas sous tension, les pertes sont minimum et limitées aux pertes sur les faces des éléments dans la cavité et aux miroirs. Le laser peut alors osciller. Il est également possible d'appliquer une tension moindre sur le modulateur, suffisante pour que les pertes soient plus grandes que le gain non saturé. Les modulateurs électrooptique sont très rapides et sont utilisées quand on veut des commutations rapides. Cependant ils nécessitent l'introduction d'un certain nombre d'éléments dans la cavité, ce qui augmente les pertes intracavité, et complique l'alignement.
- **Modulateur acousto-optique.** Dans la cavité on place un modulateur acousto-optique. La cavité est alignée sur l'ordre 0 du modulateur. Quand il est alimenté, il diffracte une partie du faisceau dans l'ordre 1. Les pertes sont alors suffisamment grandes pour que l'oscillation laser soit interdite. Quand il n'est pas sous tension, le mode de la cavité n'est pas dévié sur l'ordre 1 du réseau, les pertes sont minimum et le laser peut osciller.

VI.3.2 les équations de base

La construction de l'impulsion s'appuie sur les mêmes équations de la dynamique des lasers (??) et (??), vues au début de ce chapitre.

$$\frac{dD}{dt} = R_p - \kappa n D - \gamma D \quad (\text{VI.37})$$

$$\frac{dn}{dt} = \kappa n D - \gamma_{cav} n \quad (\text{VI.38})$$

a Construction de la population

On considère qu'à $t = 0$, le nombre de photons dans la cavité est nul ($n = 0$) et que l'inversion de population est nulle ($D = 0$). L'inversion de population D vérifie donc

$$\frac{dD}{dt} = R_p - \gamma D \quad (\text{VI.39})$$

En résolvant cette équation avec les conditions aux limites en $t = 0$, on peut exprimer l'inversion de population D sous la forme :

$$D = \frac{R_p}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (\text{VI.40})$$

On peut définir deux seuils pour l'inversion de population D_{seuil} . Le premier seuil correspond au cas où la cavité laser est bloquée (pertes très importantes). Ce seuil

$D_{stat}^{bloqué}$ correspond à l'inversion de population qui serait nécessaire pour que le laser oscille en régime bloqué. En pratique, $D_{stat}^{bloqué}$ est très grand, l'inversion de population D est toujours en dessous de cette limite et il n'y a pas oscillation laser. On a donc

$$\frac{R_p}{\gamma} < D_{stat}^{bloqué} = \frac{\gamma_{cav}^{bloqué}}{\kappa} \quad (\text{VI.41})$$

On peut aussi définir un deuxième seuil ou la cavité est libre (pertes minimum dans la cavité). Ce seuil D_{stat}^{libre} correspond à l'inversion de population qui est nécessaire pour que le laser commence à osciller, quand les pertes sont minimum.

Pour que une impulsion géante se construise, il faut donc qu'à la relation (??) précédente, se rajoute la condition

$$D = \frac{R_p}{\gamma} \gg D_{stat}^{libre} = \frac{\gamma_{cav}^{libre}}{\kappa} \quad (\text{VI.42})$$

Enfin, pour avoir une impulsion la plus grande possible, il est nécessaire que l'inversion de population arrive à la saturation avant que les pertes soient commutées. Cette saturation est atteinte dans un temps qui ne dépend que du niveau atomique excité $\tau_b = \frac{1}{\gamma_b}$

b Construction de l'impulsion

Le temps de construction de l'impulsion, correspond au temps nécessaire pour obtenir une impulsion à partir du moment où les pertes ont été commutées. Le temps caractéristique sur l'un laser $Nd : YAG$ (TP) est de 10 à 100 ns.

On peut définir un taux d'inversion r qui quantifie l'inversion de population par rapport à l'inversion de population nécessaire pour atteindre le seuil d'oscillation (cavité libre). Ce taux d'inversion r peut s'exprimer sous la forme

$$r = \frac{D_{max}}{D_{seuil}^{libre}} \quad (\text{VI.43})$$

On peut alors exprimer l'évolution temporelle du nombre de photons dans la cavité sous la forme suivante

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma_{cav}^{libre} n - \kappa n D \quad (\text{VI.44})$$

$$\frac{dn}{dt} = \kappa n (D - D_{stat}^{libre}) \quad (\text{VI.45})$$

$$\frac{dn}{dt} = \kappa n D_{stat}^{libre} (r - 1) \quad (\text{VI.46})$$

$$\frac{dn}{dt} = \gamma_{cav}^{libre} n (r - 1) \quad (\text{VI.47})$$

$$(\text{VI.48})$$

En résolvant cette équation, avec la condition aux limites, à $t = 0, n = 0$, on peut écrire l'évolution temporelle du nombre de photons dans la cavité sous la forme suivante

$$n = n_0 e^{\frac{(r-1)t}{\tau_c}} \quad (\text{VI.49})$$

L'évolution temporelle du nombre de photons dans la cavité est gouvernée par le temps de cavité.

Lorsque le nombre de photons n dans la cavité atteint n_{stat} , cette description n'est plus vérifiée. Le nombre de photons dans la cavité a alors beaucoup augmenté.

c largeur du pic

Pour que l'extraction de photons soit efficace, et que l'on obtienne une impulsion, il faut que $r > 2$. Si le taux d'inversion est trop petit, l'inversion de population ne diminue pas assez et on observe plusieurs impulsions moins énergétiques.

Le nombre de photons dans la cavité n diminue à partir du moment où $D < D_{stat}^{libre}$.

L'impulsion est symétrique pour des valeurs de r petite et dissymétrique pour les grandes valeurs de r ($r > 7$).

VI.4 Laser à blocage de modes

Le laser à mode bloqué (ou "laser mode locké") délivre des impulsions très courtes. Il fonctionne sur un principe complètement différent du laser déclenché. Le laser à blocage de mode est avant tout un laser continu dont la plage de gain et donc le nombre de modes pouvant osciller est très grand.

VI.4.1 expression de l'intensité

On peut donc considérer qu'il s'agit d'un laser multimode comportant N modes. On peut donc écrire le champ sous la forme suivante

$$E(t) = \sum_{m=0}^{N-1} A_m \cos(\omega_m t - \varphi_m) \quad (\text{VI.50})$$

où A_m , ω_m et φ_m sont respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase du mode m . la pulsation vérifie donc la relation

$$\omega_m = m \frac{2\pi c}{L} \quad (\text{VI.51})$$

- En général, tous ces modes sont incohérents (i.e. la phase varie aléatoirement entre ces modes).

On peut écrire avec I_m l'intensité du mode m .

$$\langle I \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} I_m \quad (\text{VI.52})$$

On peut aussi écrire l'intensité totale sous la forme

$$I = EE^* = \sum_{m,m'} E_m E_{m'} e^{i(\varphi_m - \varphi_{m'})} e^{i(\omega_m - \omega_{m'})t} \quad (\text{VI.53})$$

En pratique les fluctuations sont très importantes, car les variations de phase entre modes sont importantes.

- On peut faire en sorte que les modes soient cohérents.
On considère ici le cas le plus simple où les phases $\varphi_m = \varphi$ et $A_m = A_0, \forall m$.
On peut alors écrire l'intensité I sous la forme ci-dessous

$$I = I_0 \left| \sum_{m=0}^{N-1} e^{i(\omega_m t)} \right|^2 \quad (\text{VI.54})$$

Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme plus connue

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{N\pi ct}{L}}{\sin \frac{\pi ct}{L}} \right)^2 \quad (\text{VI.55})$$

VI.4.2 Etude de I(t)

La raie a pour largeur $\frac{L}{Nc}$. Chaque mode a une intensité en $I_0 N^2$. Les modes sont ainsi d'autant plus courts et plus intenses que N le nombre de modes est grand. Les modes sont séparés de $\frac{L}{c}$

Pour augmenter le nombre de modes, on joue sur deux paramètres

- La longueur de la cavité laser. $\frac{c}{L}$ doit être petit.
- la courbe de gain doit être aussi large que possible

VI.4.3 Comment bloquer la phase ?

Pour que la phase de chaque mode soit la même, il faut induire un léger couplage entre modes. On distingue deux types de stratégies

- "Magic Mode locking": on crée une perturbation (coup, vibration...)
- Couplage passif : par effet non linéaire, par un absorbant saturable.

Couplage par un absorbant saturable. Un absorbant saturable est un matériau dans lequel la transmission augmente quand il est soumis à une forte illumination. On peut le décrire par un système à deux niveaux. On peut alors montrer que $\alpha(I) = \alpha_0(1 + \frac{I}{I_{sat}})^{-1}$ où α_0 est l'absorption linéaire et I_{sat} est l'intensité de saturation. Cet absorbant saturable aura deux effets complémentaires. Il créera des pertes très importantes tant que la puissance ne sera pas suffisante. Par conséquent le seul mode stable pouvant laser sera un mode de grande intensité. De plus, pour un pic donné il créera des pertes plus importantes sur les flancs du pic. Pour un absorbant saturable rapide (par rapport au temps d'une impulsion), le pic sera affiné de manière symétrique. Pour un absorbant saturable "lent", l'absorption par l'absorbant saturable, et donc l'affinement du pic se fera au début du pic. Concrètement, le mode qui lasera profitera de l'énergie des modes voisins qui eux ne pourront pas laser.

Couplage par effet Kerr. Il s'agit là d'un effet non linéaire du 3^{ème} ordre. On montre que l'indice est modifié sous l'effet d'une illumination d'intensité I . Plus exactement, on exprime l'indice n sous la forme

$$n = n_0 + \frac{1}{2}n_2 I \quad (\text{VI.56})$$

Dans le cas que nous considérons, $n_2 > 0$. Éclairé sous une onde gaussienne, le milieu forme une lentille convergente qui va faire encore plus focaliser le faisceau. Cet effet

d'auto focalisation est utilisé pour stabiliser les lasers à blocage de mode. En mettant un diaphragme dans la cavité, on fait un sorte que sous faible illumination le faisceau soit trop large par rapport au diaphragme : des pertes sont alors induites et le laser ne peut démarrer. Par contre, en présence d'autofocalisation, le mode la cavité n'est pas bloqué par le diaphragme. Seul le laser fonctionnant à haute intensité peut donc fonctionner.

- Couplage actif. On introduit un électro-optique dont les pertes correspondent à la fréquence $\frac{c}{L}$. On crée ainsi des bandes latérales cohérentes qui permettent de bloquer le laser.

VI.4.4 fréquence et dispersion dans un laser ultrarapide

Lors de sa propagation dans la cavité le pulse se déforme. on peut essayer de le comprimer temporellement au maximum.

- *Auto modulation de phase*

L'effet Kerr peut induire un changement de l'indice de réfraction au cours du temps quand l'impulsion se propage. On peut, en effet, écrire l'indice sous la forme suivante en prenant en compte le temps

$$n = n_0 + \frac{1}{2}n_2I(t) \quad (\text{VI.57})$$

avec $I(t) = e^{-\Gamma t^2}$. Pour simplifier, on considère une onde plane se propageant dans un milieu non linéaire

$$E(t, x) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{VI.58})$$

$$k = \frac{\omega_0}{c}n(t) \quad (\text{VI.59})$$

On peut donc en déduire la fréquence instantanée qui peut être écrite de la façon suivante

$$\omega(t) = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c} \frac{\partial n(t)}{\partial t} x \quad (\text{VI.60})$$

On peut alors exprimer la variation de fréquence $\delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$ sous la forme

$$\delta\omega(t) = -\frac{\omega_0 n_2}{2c} x \frac{\partial I(t)}{\partial t} \quad (\text{VI.61})$$

Par conséquent pour le front avant de l'impulsion, et pour $n_2 > 0$, le pulse s'élargit vers le rouge. A l'opposé pour le front arrière s'élargit vers le bleu. la modulation de phase élargit donc spectralement les impulsions. Elle permet donc de les compresser plus temporellement. *Attention, sur une représentation de l'impulsion en fonction de t, le front avant est à gauche et le front arrière à droite.*

- *Propagation dans un milieu transparent*

On montre que lorsqu'une impulsion ultra-courte se propage dans un milieu transparent, elle est soumise à un retard (effet de l'indice linéaire), à un élargissement temporel et une déformation de l'impulsion. C'est un effet de la dispersion de l'indice car l'indice croit en général avec la fréquence : dans un milieu

linéaire le bleu se propage plus lentement que le rouge. On parle de dispersion de vitesse de groupe (GVD) positive.

Pour compenser cet effet on peut placer des réseaux (2 par exemple) dans la cavité. La déviation dans un réseau est plus importante pour le rouge que pour le bleu. On ainsi compenser la GVD positive.

On peut aussi disposer plusieurs prismes (4 ou 2 avec un miroir) dans la cavité. le rouge étant moins dévié que le bleu traverse une épaisseur de verre plus importante et subit donc un retard par rapport au bleu, ce qui compense la GVD positive.

Il existe également es miroirs dits "chirpés" qui ont une GVD négative.

— ***balayage de la fréquence***

Il existe de nombreuse façons de balayer la fréquence. On peut par exemple utiliser un filtre de Lyot.

VI.4.5 performances

laser TiSa à mode locking passif, $\Delta t = 50fs$ de manière typique. On peut arriver à $\Delta t_{min} = 4 - 5fs$. $P_{max} = 200kW$, cadence $100MHz$ avec un amplificateur synchrone, on arrive à un gain de $10^4 - 10^5$, des impulsion de $10 - 100mJ$ avec $I = 10^{18}W/cm^2$

Chapitre VII

travaux dirigés : corrections

VII.1 faisceaux gaussiens

VII.1.1 transformation d'un faisceau gaussien

a Résolution par les matrices (ABCD)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{VII.1})$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2d \\ -1/f & 1 - \frac{2d}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d}{f} & 4d(1 - \frac{d}{f}) \\ -1/f & 1 - \frac{2d}{f} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.2})$$

On peut alors écrire

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (\text{VII.3})$$

avec $q = -iz_R$ et $q' = -iz'_R = -id$.

En remplaçant, on obtient alors l'équation suivante :

$$-iAz_R + B = Cdz_R - iDd$$

En identifiant les parties imaginaires et réelles on trouve deux solutions

- $z_R = d$ et $f = \frac{5}{4}d$
- $f = 2d$ et $z_R = 2f$

b Résolution en utilisant le paramètre confocal q

Attention cette résolution est limitée aux cas simples. Elle devient vite très compliquée. On appelle q_0 le paramètre confocal initial, q_1 celui juste avant la lentille, q_2 celui juste après la lentille, et enfin q'_0 le paramètre confocal final.

On peut écrire

$$q_1 = q_0 + 2d \quad (\text{VII.4})$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (\text{VII.5})$$

$$q'_0 = q_2 + 2d \quad (\text{VII.6})$$

On peut alors en déduire la relation ci-dessous

$$q'_0 = f \frac{q_0 + 2d}{f - q_0 - 2d} + 2d \quad (\text{VII.7})$$

Cette relation peut alors s'écrire sous la forme

$$-id(f - q_0 - 2d) = q_0 f + 2df + 2d(f - q_0 - 2d) \quad (\text{VII.8})$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve pour la partie réelle

$$-id(f - 2d) = q_0(f - 2d) \quad (\text{VII.9})$$

et pour la partie imaginaire (si $f \neq 2d$)

$$5d^2 = 4df \quad (\text{VII.10})$$

On trouve ainsi les deux paires de solutions

- $z_R = d$ et $f = \frac{5}{4}d$
- $f = 2d$ et $z_R = 2f$

VII.1.2 adaptation d'un faisceau gaussien

Dans cet exercice, on cherche à exprimer la longueur de Rayleigh du mode final z'_R et la focale f de la lentille. On appelle q_1 le paramètre confocal initial, q_2 , celui juste avant la lentille, q_3 celui juste après la lentille, q_4 le paramètre confocal final (au niveau du miroir plan). Le texte indique que $z_R = d_1$ et que q_4 et q_1 sont imaginaires purs.

On en déduit alors en identifiant les parties réelles et imaginaires

$$Dq_4 - Aq_1 = 0 \quad (\text{VII.11})$$

$$B - Cq_1Q_4 = 0 \quad (\text{VII.12})$$

On peut écrire la matrice de propagation sous la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{VII.13})$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_2 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.14})$$

En identifiant les parties imaginaires et réelles, on obtient les deux équations

$$\left(1 - \frac{d_1}{f}\right)(-iz'_R) - \left(1 - \frac{d_2}{f}\right)(-id_1) = 0 \quad (\text{VII.15})$$

$$d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} - \frac{d_1}{f} z'_R = 0 \quad (\text{VII.16})$$

Ces expressions peuvent se simplifier sous la forme

$$z'_R \left(1 - \frac{d_1}{f}\right) = 1 - \frac{d_2}{f} d_1 \quad (\text{VII.17})$$

$$d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} - \frac{d_1}{f} z'_R = 0 \quad (\text{VII.18})$$

- Commençons par considérer le cas particulier où $d_1 = d_2$, on a alors $f = d_1$ et $z'_R = d_1$
- si $f \neq d_1$, l'expression de z_R est alors plus compliquée. Il faut alors résoudre une équation du second degré. Il faudra alors distinguer deux cas correspondant à plusieurs solutions

$$f^2(d_1 + d_2) - 2d_1(d_1 + d_2)f + 2d_1^2d_2 = 0 \quad (\text{VII.19})$$

On calcule alors le discriminant

$$\Delta = 4d_1^2(d_1^2 - d_2^2) \quad (\text{VII.20})$$

Dans le cas où $d_1 < d_2$, cette équation du second degré n'a pas solution. Nous considérons le cas où $d_1 > d_2$ On peut alors exprimer f et z'_R sous la forme

$$f = d_1(1 \pm \sqrt{\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}}) \quad (\text{VII.21})$$

$$z'_R = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - d_2^2} \quad (\text{VII.22})$$

en conclusion nous avons deux solutions (si $d_1 > d_2$), une si $d_1 = d_2$ et aucune si $d_1 < d_2$

- si $f = d_1$, alors $z'_R = d_1$
- si $f \neq d_1$ et si $d_1 > d_2$

$$f = d_1(1 \pm \sqrt{\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}}) \quad (\text{VII.23})$$

$$z'_R = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - d_2^2} \quad (\text{VII.24})$$

VII.1.3 Résonance dans une cavité Fabry Péro

a Dispositif expérimental

On considère une cavité Fabry-Pérot constituée de miroirs plans M_1 et M_2 d'épaisseur négligeable, de mêmes caractéristiques en transmission et réflexion et placés parallèlement l'un à l'autre. Leurs coefficients de transmission et de réflexion en amplitude du champ électrique sont appelés respectivement r et t et sont supposés réels. On appelle R et T les coefficients de réflexion et de transmission en intensité. Sur l'axe (z') perpendiculaire aux miroirs, M_1 se situe en à l'abscisse 0 et M_2 à l'abscisse d . L'interféromètre ainsi constitué est éclairé sous incidence normale par une onde plane monochromatique d'expression $E_i = A_i e^{-i(\omega t - kz)}$ qui se propage dans le sens des z croissants. E_i est le champ électrique et A_i l'amplitude complexe. On appellera désormais E_c (respectivement E'_c), l'onde oscillant dans la cavité Fabry-Pérot se propageant dans le sens des z croissants (respectivement décroissants). On appellera E_t l'onde transmise par la cavité. De manière générale, on adoptera les notations suivantes : $E_c = A_c e^{-i(\omega t - kz)}$; $E'_c = A'_c e^{-i(\omega t + kz)}$; $E_t = A_t e^{-i(\omega t - kz)}$

b Calcul des amplitudes

b.1 Approche interférentielle

On cherche à montrer ici comment les champs E_r , E_c , E'_c et E_t résultent de l'interférence dans l'interféromètre d'une multitude d'ondes obtenues par réflexions et transmissions multiples sur les miroirs.

En premier lieu, l'onde E_i est partiellement réfléchi par M_1 et donne l'onde E_{r1} . Elle est aussi partiellement transmise par M_1 et crée ainsi l'onde E_{c1} . L'onde E_{c1} à son tour va se réfléchir sur M_2 , ce qui permettra d'obtenir les ondes E'_{c1} et E_{t1} . E'_{c1} est partiellement transmise par M_1 et crée l'onde E'_{r2} . E'_{c1} en étant à son tour partiellement réfléchi sur M_1 permettra d'obtenir E_{c2} qui à son tour créera, par réflexion et transmission sur M_2 , E'_{c2} et E_{t2} .

A l'aide des coefficients r et t , écrire les relations entre les champs E_{r1} , E_{c1} , E'_{c1} , E_{t1} et E_i au niveau des miroirs en $z = 0$ et $z = d$. En déduire les expressions des amplitudes A_{r1} , A_{c1} , A'_{c1} et A_{t1} en fonction de A_i , des coefficients r et t et de la longueur de la cavité. Etablir une relation de récurrence pour les amplitudes.

Sommer tous les champs E_{tj} pour $0 < j < \infty$. On obtient ainsi le champ E_t .

De même, calculer les champs E_r , E_c et E'_c .

b.2 Approche globale On considère maintenant l'état stationnaire du système : E_c , E'_c et E_t résultent déjà de l'interférence des ondes multiples étudiées précédemment. On essaie là de retrouver directement les expressions de E_c , E'_c , E_r et E_t .

Ecrire la relation reliant E_i , E_c , E'_c et E_r en $z = 0$. Ecrire ensuite les deux relations reliant d'une part E_c et E'_c et d'autre part E_t et E_c au niveau du miroir M_2 . En déduire E_c , E'_c , E_r et E_t en fonction de E_i et retrouver les relations précédentes.

c Calcul des intensités

En déduire l'intensité totale I_t du champ transmis en fonction de l'intensité du champ incident I_i . Donner l'expression de I_t sous la forme

$$I_t = \frac{I_i}{(1 + m \sin^2(kd))} \quad (\text{VII.25})$$

où m est un paramètre que l'on définira.

Exprimer aussi les intensités I_r , I_c et I'_c en fonction de I_i . que peut-on dire de $I_r + I_t$?

AN : Calculer m pour $R = 0,5$ et $R = 0,9$.

Jusqu'à la fin, on considère que les miroirs sont très réfléchissants : R est proche de 1 et donc $m \gg 1$

d Etude des principales caractéristiques du Fabry-Pérot

On étudie ici les caractéristiques générales d'un Fabry-Pérot dont on fait varier la longueur d .

d.1 Etude de I_t

Trouver les longueurs d_p de la cavité (respectivement d'_p) pour lesquelles I_t est maximale (respectivement minimale). p est un entier. Dans ces deux cas, calculer aussi I_r . Calculer le déphasage de l'onde sur un aller retour. On appelle d la variation de longueur de la cavité permettant d'observer deux maxima successifs.

Tracer $I_t(d)$ pour $R = 0,9$ et $R = 0,5$.

d.2 étude de la finesse

On définit la finesse F de la cavité comme le rapport de l'intervalle entre 2 pics successifs obtenus dans le graphe $I_t(d)$ sur la largeur à mi-hauteur des pics.

Calculer la largeur à mi-hauteur des pics et donner l'expression de la finesse en fonction de m ($m \gg 1$). Comment varie la largeur des pics et la finesse quand la réflectivité R des miroirs augmente et tend vers 1 ?

d.3 Champ intracavité

Montrer que dans le cas où la réflectivité des miroirs est très proche de 1, on peut faire une approximation encore plus forte et écrire la finesse sous la forme $F = \frac{2\pi}{2T}$. ($2T$ représentent les pertes de transmission par les miroirs).

Donner alors les valeurs à résonance de I_c et I'_c en fonction de I_i et F . Conclure.

Dans un Fabry-Pérot quelconque dont les pertes sont faibles, on montre ainsi que la finesse vérifie $F = \frac{2\pi}{\text{pertes}}$, quelques soient l'origine des pertes.

e Le Fabry-Pérot comme analyseur de fréquence

On suppose dans cette partie que la longueur de la cavité varie mais de manière suffisamment faible pour que l'on observe que quelques pics de transmission. On se place dans le cas d'une cavité de longueur d_0 macroscopique ($d_0 \gg \lambda$)

AN : Cavité de longueur initiale d_0 égale à $7,5\text{cm}$, longueur d'onde égale à 633nm . Calculer la variation relative $\frac{\Delta d}{d_0}$ de longueur de la cavité.

Dans cette partie, on considérera donc que la longueur de la cavité est quasiment constante et égale à d_0 . On fera l'approximation, dans toute cette partie, que $\frac{\Delta d}{d_0} \ll 1$. On déduira aussi de cette approximation que $\frac{c}{2d_0} \ll 1$.

Une des caractéristiques du Fabry-Pérot considéré ici est l'intervalle spectral libre (*ISL*) qui sera étudié au cours de cette partie ($ISL = \frac{c}{2d_0}$).

- *une seule onde* On envoie, à incidence normale, sur ce même Fabry-Pérot, une onde (*onde1*) plane monochromatique de fréquence ν_1 et de longueur d'onde λ_1 . On observe pour l'*onde1*, pour des distances appelées respectivement d_{p-1}^1 , d_p^1 , d_{p+1}^1 les pics correspondant respectivement aux ordres $p-1$, p et $p+1$. En utilisant le fait que la longueur de la cavité est quasi-constante, exprimer l'entier p en fonction de d_0 et de λ_1 .

AN : Pour une cavité dont la longueur de cavité d_0 est de $7,5\text{cm}$ et une lon-

gueur d'onde de l'ordre de $633nm$, donner l'ordre de grandeur de l'entier p .

- *Deux ondes dont la différence de fréquence est égale à l'ISL.*
On envoie maintenant, à incidence normale, sur ce même Fabry-Pérot, l'onde 1 précédente ainsi qu'une autre onde plane monochromatique de fréquence ν_2 . La fréquence ν_2 de la deuxième onde vérifie la relation $\nu_2 = \nu_1 + \frac{c}{2d_0}$. Exprimer d_p^2 en fonction de d_{p-1}^1 . Conclure.

L'intervalle spectral libre (ISL) est donc l'écart minimum en fréquence pour que deux ondes monochromatiques aient les mêmes longueurs de résonance.
Dans le cas du Fabry Perot étudié ici, l'ISL est égal à $\frac{c}{2d_0}$ et vérifie donc $ISL \ll \nu_1$.

- *Deux ondes dont la différence de fréquence est inférieure à l'ISL*
On envoie maintenant, toujours sous incidence normale, l'onde 1 ainsi qu'une autre onde plane monochromatique de fréquence ν_3 telle que $\nu_3 = \nu_1 + \alpha \left(\frac{c}{2d_0} \right)$ où $0 < \alpha < 1$.
Quelles sont maintenant les longueurs pour lesquelles laquelle l'onde 3 résonne ? Exprimer d_p^3 en fonction de d_p^1 .
On appelle δd la variation de longueur minimum qui permet d'obtenir successivement une résonance de l'onde 3 puis une résonance de l'onde 1. Exprimer δd . Tracer le graphe $I_t(d)$ et y reporter Δd et δd .
Calculer $\frac{\delta d}{\Delta d}$ et comparer à $\frac{\nu_3 - \nu_1}{ISL}$. Conclure.

f Limite de résolution

Le Fabry-Pérot peut donc permettre de connaître l'écart entre deux fréquences voisines.

Quelle est alors la limite de résolution en fréquence d'un Fabry Pérot de finesse F et de longueur d_0 utilisé comme appareil spectroscopique (destiné à séparer des longueurs d'ondes très proches) ?

AN : calculer la limite de résolution pour $d_0 = 7,5cm$ et $R = 0,9$.

g Fabry Pérot confocal

Expliquer pourquoi un Fabry Pérot plan-plan n'est pas une bonne cavité pour des ondes gaussiennes.

Un Fabry-Pérot confocal est constitué de deux miroirs de rayons de courbure R_c et a une longueur de cavité égale à R_c .

Montrer par des arguments simples et purement géométriques que, dans un Fabry-Pérot confocal, un rayon se superpose sur lui même au bout de deux allers retours (sauf s'il est confondu avec l'axe optique). On peut par exemple considérer un rayon parallèle à l'axe optique mais non confondu avec cet axe et faire un schéma.

Quel est alors l'intervalle spectral libre du Fabry-Pérot confocal ?

AN : $R_c = 3,75\text{cm}$. Comparer à l'ISL du Fabry-Pérot plan de $7,5\text{cm}$.

h Le Fabry-Pérot comme miroir diélectrique ou comme couche antireflet

On considère une couche d'indice n et d'épaisseur optique nd_0 fixe microscopique (de l'ordre de la longueur d'onde). Cette couche constitue un Fabry-Pérot mais il n'est pas " adapté en impédance " En effet les miroirs à chaque extrémité n'ont pas les mêmes coefficients de transmission. Calculer les champs en présence en fonction du champ incident. En déduire t et r pour la couche.

Que peut-on dire de r et t quand la longueur d'onde est telle que nd_0 prend les valeurs $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda}{4}$?

Quelle est la valeur de p ?

Expliquer alors comment fonctionne un miroir diélectrique.

VII.1.4 Stabilité et modes transverses d'une cavité

a stabilité d'une cavité linéaire

1. Soit une cavité plan convexe de longueur L et constituée par un miroir plan et un miroir convexe de rayon de courbure R_c . Donner une condition sur la longueur L pour que cette cavité soit stable. Quand la cavité est stable déterminer le mode propre TEM_{00} de la cavité.
2. Soit une cavité symétrique de longueur L et constituée de deux miroirs identiques de rayon de courbure R_c . Répondre aux mêmes questions que dans la partie 1

b adaptation de modes

On considère une cavité plan convexe de longueur $\frac{L}{2}$ et dont le miroir sphérique a un rayon de courbure égal à L . Quel est le mode propre de la cavité ? On veut injecter un faisceau gaussien initialement de longueur de Rayleigh $z_R = \frac{L}{2}$ dans cette cavité. On dispose d'une lentille de focale L . Quelles doivent être les distances col du faisceau gaussien initial/ lentille et lentille /cavité pour que le faisceau injecté soit adapté à la cavité ?

c Stabilité d'une cavité en anneau

On considère une cavité en anneau de longueur L et constituée de 4 miroirs plans. On place une lentille de focale f dans cette cavité. Quelle est la condition sur L pour que cette cavité soit stable ? Quelles sont alors les caractéristiques de son mode propre TEM_{00} ?

d Corrections : stabilité d'une cavité linéaire

— méthode des paramètres g

$$g_1 = 1g_2 = 1 - \frac{L}{R} \quad (\text{VII.26})$$

On applique la condition de stabilité $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$. donc la condition de stabilité est $R > L$.

— **méthode des fronts d'onde** le rayon de courbure R est positif.

$$R = L + \frac{z_R^2}{L} \quad (\text{VII.27})$$

On en déduit que la longueur de Rayleigh vérifie

$$z_R = \sqrt{(R - L)L} \quad (\text{VII.28})$$

— **méthode des matrices (ABCD)**

VII.1.5 Gain et puissance d'un laser

a Système à 4 niveaux

On considère un laser à 4 niveaux dont le schéma de principe est représenté ci-dessous. La transition laser se situe ici entre les niveaux b et a.

On appellera n_i la densité d'atomes dans le niveau i . τ_{ij} (en s^{-1}) correspond au taux de désexcitation spontanée du niveau i vers le niveau j . On appelle n_0 le nombre total d'atomes. Les atomes sont pompés du niveau fondamental f vers le niveau excité e avec le taux de pompage W_p (en s^{-1}). Le taux de pompage par unité de volume R_p peut alors s'exprimer sous la forme $R_p = n_f W_p$. Une fois dans le niveau e , les atomes peuvent se désexciter spontanément vers le niveau b . Le temps de désexcitation spontanée $\tau_{eb} = \frac{1}{\gamma_{eb}}$ est supposé être très court devant tous les autres temps caractéristiques du système et en particulier devant τ_{ef} . Quelle conséquence cela a-t-il sur la relaxation spontanée du niveau e ? Les atomes sur le niveau b peuvent se désexciter vers le niveau a par émission stimulée avec le taux W (en s^{-1}). On peut écrire $W = \sigma I_{intra}^{tot}$ où I_{intra}^{tot} est l'intensité totale intracavité et σ (en m^2) est la section efficace d'émission stimulée de b vers a .

b Notations

On adoptera dans la suite les notations suivantes : L est la longueur de la cavité laser et ℓ la longueur du tube. Pour simplifier les expressions, on supposera que le tube remplit toute la cavité et que $L = \ell$. R_p et R_c sont les coefficients de réflexion des miroirs en intensité. On supposera que la réflectivité des miroirs est très proche de 1. I_+ (respectivement I_-) est l'intensité intracavité dans le sens de propagation positif (respectivement négatif) (voir schéma). On négligera les interférences entre l'onde se propageant dans le sens positif et celle se propageant dans le sens négatif. On supposera de plus que ces intensités sont constantes sur la longueur de la cavité. On écrira donc $I_+ \approx I_-$. L'intensité totale intracavité I_{intra}^{tot} que l'on notera aussi plus simplement I vérifiera $I_{intra}^{tot} = I_+ + I_- = I$. g est le gain linéique en intensité du laser. Dans le milieu amplificateur, l'amplitude du champ électrique vérifie donc $\frac{dA}{dz} = \frac{gA}{2}$. g_0 est le gain linéique non saturé par unité de longueur, c'est à dire le gain linéique en intensité lorsque l'intensité intra-cavité est nulle.

c Etapes du calcul

- **Equations d'évolution des populations**

Ecrire les équations d'évolution des populations donnant $\frac{dn_i}{dt}$ en fonction des autres populations et des paramètres du système. Dans l'état stationnaire, en déduire un système de 4 équations à 4 inconnues. Exprimer la différence de population $D = n_b - n_a$ en fonction de n_0 et des paramètres du système.

- **Intensité intracavité** On appellera D_0 la différence de population lorsque l'intensité intracavité est nulle. Exprimer D en fonction de D_0 . En déduire que g peut s'exprimer sous la forme $g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_{sat}}}$ où g_0 (gain non saturé) et I_{sat} (Intensité de saturation) seront définis en fonction des paramètres du système. Etablir l'expression de l'intensité totale intracavité I en fonction du gain saturé, du gain non saturé et de l'intensité de saturation.

- **Condition d'oscillation.**

Connaissant l'amplitude du champ A_1 en un point (par exemple juste après le miroir M_c) et un instant donnés, donner son expression A_2 après un aller-retour dans la cavité. En utilisant dans l'état stationnaire, la condition d'oscillation *gainlinéique = pertes*, exprimer le gain saturé en fonction des réflectivités des miroirs. Donner l'expression du seuil du laser

- **Puissance de sortie.**

En déduire l'intensité intracavité I en fonction de I_{sat} , g_0 , ρ_{tot} puis l'intensité I_{out} qui sort par le miroir plan. En déduire enfin P_{out} la puissance qui sort par le miroir plan, connaissant la surface du faisceau au niveau du mesureur de puissance.

- **Application numérique.**

On suppose que les pertes du barreau sont négligeables. La section efficace est égale à $3.10^{-17} m^2$ et la durée de vie du niveau du haut à $3.10^{-7} s$. Déterminer un ordre de grandeur de la puissance de sortie, à partir des valeurs suivantes mesurées ou données en TP : gain non saturé, diamètre du faisceau de sortie, transmission des miroirs.

